Министерство науки и образования Российской Федерации
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра Электронных приборов

М.С. Квасница

Статические модели систем передачи и отображения информации

Учебное пособие

Томск 2007

Квасница М.С.

Статистические модели систем передачи и отображения информации: Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2007. - 95 с.

Оглавление

Введение

Разработка и применение систем передачи и отображения информации предполагает, с одной стороны, знание физических особенностей процессов протекающих в реальных электронных приборах и устройствах, с другой стороны, использование базовых информационных понятий и методов расчета информационных систем. Данное обстоятельство в значительной степени усиливается из-за стремительного роста масштабности электронных информационных систем, а также построение этих систем с учетом более «тонких» и сложных физических процессов. Примерами, иллюстрирующими данную ситуацию, являются, в частности, разработка методов и средств вычислительной томографии, преобразование света в нелинейных оптических средах, переходов в твердотельной электронике к наноразмерным структурам. С этих позиций, подготовка инженеров по базовому направлению «Электронные приборы и устройства» должны предусматривать изучение дисциплин отражающих с единых позиций как физические так и информационные аспекты целых классов электронных приборов и устройств.

Решение вышеуказанной задачи предполагает представление электронных приборов и устройств как неких информационных систем. Поскольку базовые информационные понятия, например, среднеквадратичная погрешность, количество информации по Шеннону, вероятность предельного или ошибочного решения и др., базируются на вероятностной методологии, то и представление физических процессов в данных приборах и устройствах неизбежно должно быть вероятностным. Данное обстоятельство, а точнее его роль, резко усиливается при использовании нелинейных физических процессов. Например, для однозначного представления процессов в нелинейных оптических средах недостаточно знание, помимо свойств среды, только интенсивности входного оптического излучения как среднего от произведения числа квантов падающих на единичную площадку в единицу времени на энергию кванта. В этом случаи, как правило, используются такие характеристики кА функции когерентности второго и более высокого порядка. Данные функции являются, по существу, корреляционными функциями соответствующего порядка в теории вероятности. С формальных позиций, данный пример иллюстрирует известное правило: в нелинейных системах усредненные характеристики (наблюдаемых) процессов не могут однозначно определяться только усредненными характеристиками исходных (выходных) процессов.

Иными, словами, представление электронных приборов и устройств, включая квантовые и оптоэлектронные приборы, как информационные системы предполагает вероятностное описание физических процессов в них протекающих. Такое преставление не является вымышленным, так как поведение основных информативных частиц (квантов света, электронов и др.) носит чисто вероятностный характер. Трудность использования вероятностного подхода обусловлено не только чисто математической сложностью привлечением новых понятий, но, главным образов детерминированным стереотипом мышлением заметного большинства людей, в частности, студентов, обучающихся по техническим специальностям.

Целью данной дисциплины и, соответственно настоящего учебного пособия, является формирование представлений об электронных приборов и устройствах, как неких информационных системах и изучение методов анализа и синтеза данных систем.

Модель любой системы характеризуется следующими переменными: $x(t)$ - входные сигналы, характеризующие действие внешней среды; $y(t)$ - выходные сигналы, характеризующие реакцию системы; $z(t)$ - процесс, характеризующий процесс системы; процесс, характеризующий состояние системы. Величины x, y, z могут быть векторными или скалярными.

Детерминирование системы характеризуется однозначной взаимосвязью между входными $x(t)$ и выходными $y(t)$ сигналами. Например, для линейных систем:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad ,$$

где $h(\tau)$ - импульсная переходная функция линейной системы.

Стохастические системы характеризуются неоднозначной взаимосвязью между входными $x(t)$ и выходными $y(t)$ сигналами. Иными словами, связь между сигналами $x(t)$ и $y(t)$ может быть стохастической. Типичным примером такой системы может быть усилитель со случайным во времени коэффициентом усиления. В этом случаи можно говорить о стохастическом отображении вход – выход.

Практический интерес представляют следующие виды стохастических отображений:

a)Характеристика системы детерминирования, но входной сигнал, а следовательно и выходной сигнал – стохастические

b)Характеристика системы изменяется случайным образом, сигнал на входе детерминированный, а сигнал на выходе – стохастический;

c)Сигнал на входе $x(t)$ и характеристика $z(t)$ системы, а следовательно и сигнал на выходе – стохастические.

Существует два метода описания данных систем: прямой и косвенный. При прямом методе устанавливается связь между входным и выходным сигналом в форме функциональной зависимости, чаще всего, в форме стохастических разностных или дифференциальных уравнений. Такое описание системы использует сами значения сигналов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

При косвенном описании устанавливается соотношение между вероятностными характеристиками стохастическими сигналов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Эти два метода не являются исключающими друг друга, а тесно между собой связаны. Прямое описание используется, как правило, при испытании приборов и систем или их численном моделировании, а косвенный метод – при обработки результатов эксперимента или при теоретических расчетах. Возможны также слияние этих методов. Например, при анализе гармонического осциллятора со случайной частотой $\omega(t)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2(t)y = 0,$$

где $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + g(t)), g(t)$ - стационарная случайная функция с нулевым средним и корреляционной функцией $B(\tau)$, в условия малости относительных флуктуаций $\omega(t)$ среднее значение $\bar{y}$ будет определяться уравнением:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\omega^2 C_1 \frac{d\bar{y}}{dt} + \omega_0^2(1 - \frac{1}{2}\omega_0 C_2)\bar{y} = 0.$$

Константы C_1, C_2 определятся соотношениями:

$$C_1 = \int_0^\infty B(\tau)(1 - \cos 2\omega_0\tau)d\tau;$$

$$C_2 = \int_0^\infty B(\tau)\sin 2\omega_0\tau d\tau.$$

Анализ статических моделей электронных приборов и устройств предполагает как определение параметров процессов $z(t)$ (внутренних процессов системы), так и определение параметров процесса $y(t)$ (выходного процесса). Несмотря на различия в структуре электронных приборов и устройств и их назначений, существуют общие закономерности, формирования информационных сигналов. Например, под действием электрического поля электроны в проводнике начинают упорядоченное движение. Внешнее поле обеспечивает для отдельного электрона определенную вероятность направленного движения. Реализуют эту вероятность лишь некоторые из них, то есть число электронов, наблюдаемых в сечении проводника, в единицу времени есть величина случайная.

Материал данного учебного пособия изложен в виде трех основных разделов. Первые два раздела посвящены анализу и синтезу информационных систем с постоянными и переменными во времени сигналами, третий – информационным характеристикам систем и, по существу, является введением в теорию информации и кодировки.

1. Модели информационных систем с постоянными во времени сигналами

1.2. Общая характеристика систем

В данном случаи полезные и «мешающие» (шумовые) сигналы представляют собой постоянные во времени, в общем случаи, случайные величины.

Случайная величина ξ однозначно задается в вероятностном смысле функцией распределения вероятностей $F(x)$

$$F(x) = P(\xi \le x). \tag{1.1}$$

где $P(\xi \le x)$ - вероятность того события, что случайная величина ξ меньше или равна любого наперед заданного аргумента x.

Основные свойства функции распределения вероятностей:

$$F(\infty) = 1, F(-\infty) = 0 \tag{1.2}$$

$F(в) \ge F(a)$, если $в \ge a$.

Для непрерывной случайной величины ξ $F(x)$ представляет непрерывную функцию аргумента x. Для дискретной – ступенчатую функцию.

Функция

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \tag{1.3}$$

Носит наименование плотности распределения вероятностей случайной величины ξ. Свойства функции $f(x)$:

$$f(x) \ge 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Функция

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{jx\omega}dx. \tag{1.4}$$

называется характеристической функцией случайной величины ξ.

Среднее $\bar{\xi}$ случайной величины ξ с интегральных позиций можно представить как среднеарифметическое от наблюдаемых значений ξ_i при неограниченном росте числа наблюдаемых значений:

$$\bar{\xi} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \qquad (1.5)$$

Принципиально вычислим для интегральных расчетов следующее утверждение теории вероятностей:

Если $f(x)$ является плотностью распределения случайной величины ξ, а y есть результат однозначного функционального преобразования ξ $(y = g(\xi))$, то $\bar{y} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$.

С этих позиций

$$\bar{\xi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

а дисперсия σ^2 случайной величины ξ

$$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi}) f(x) dx = \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2. \qquad (1.6)$$

Операция усреднения обладает следующими важными свойствами:

a)Линейность (постоянную величину можно выносить за знак среднего, среднее от суммы всегда равно сумме средних значений);

b)Среднее от произведения независимых случайных величин всегда равно произведению средний значений.

Практическую значимость этих свойств трудно переоценить. Первое из указанных свойств является основой анализа и синтеза линейных систем, второе – мерой зависимости (коррелированности) случайных величин.

Информационная система с постоянными во времени параметрами с общих позиций может быть представлена следующим образцом:

$$y = \Phi[S, n], \qquad (1.7)$$

где S - информативный («полезный») сигнал; n - «мешающий» (шумовой) сигнал.

Вид функции $\Phi[\bullet]$ определяет свойства системы (специфику преобразований сигналов S и n).

1.2. Модели системы

1.2.1. Модели усилителя

В этом случай $y = k \cdot S$,

где k - коэффициент усиления усилителя; S - в общем случай случайный сигнал.

Если k - постоянная величина, то

$y = k \cdot \bar{S}$, $\sigma_y^2 = k^2 \cdot \sigma_S^2$

$$\delta_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{\sigma_S}{\bar{S}} = \delta_S. \qquad (1.8)$$

В этом случаи значение коэффициента усиления не влияют на относительные функции выходного сигнала. Иными словами, единицы измерения (масштаб) случайной величины не изменяют ее относительные флуктуации.

Если

$y = k \cdot (S + n)$,

то

$$\sigma_y^2 = k^2(\sigma_S^2 + \sigma_n^2) \qquad (1.9)$$

$$\delta_y = \sqrt{\frac{\sigma_S^2 + \sigma_n^2}{(\bar{S} + \bar{n})^2}}.$$

В реальных системах усилитель может быть источником неопределенностей (шумов). Тогда говорят об усилители со случайными значением коэффициента усиления k. Если значение k не зависит от значений S и n, то

$y = k \cdot (S + n)$;

$\bar{y} = \bar{k} \cdot (\bar{S} + \bar{n})$;

$$\sigma^2 = \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 = \sigma_k^2(\bar{S}+\bar{n})^2 + \bar{k}^2(\sigma_S^2+\sigma_n^2) + \sigma_k^2(\sigma_S^2+\sigma_n^2) =$$
$$= \sigma_k^2(\bar{S}+\bar{n})^2 + \bar{k}^2(\sigma_S^2+\sigma_n^2)$$

а относительные флуктуации:

$$\delta_y = \sqrt{\delta_k^2 + (1+\delta_k^2)\frac{\sigma_S^2+\sigma_n^2}{(\bar{S}+\bar{n})^2}}\ ;\ \delta_k^2 = \frac{\sigma_k^2}{\bar{k}^2}.$$

При $\bar{n} = \sigma_n^2 = 0$

$$\delta_y = \sqrt{\delta_k^2 + (1+\delta_k^2)\delta_S^2}$$ и

(1.10)

при $\delta_k^2 << 1$

$$\delta_y = \sqrt{\delta_k^2 + \delta_S^2}\ .$$

(1.11)

Данное выражение для δ_y наиболее часто используется для анализа усилителей со случайным коэффициентом усиления.

Обобщением модели усилителя с детерминированным коэффициентом усиления является модель линейной системы обработки случайных величин:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + B,$$

где x_i - i-тый входной сигнал; n - число входных сигналов; α_i - совокупность параметров, задающих линейную систему; B - постоянная величина, также характеризующая систему. Тогда

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i + B;$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma_i^2\ ,$$

где σ_i - дисперсия i-ого воздействия x_i. Параметр n характеризует число слагаемых в выходном сигнале y, а его значения считается заданным (детерминированным).

В ряде информационных задач n является случайной величиной. Например, если y - суммарный импульс тока лавинного фотодиода за время измерения T, то число n в этом случаи характеризует число квантов света, поступивших в чувствительную область фотодиода, и является величиной случайной.

Вычисление характеристик выходного сигнала y в этом случаи в общем виде предполагает усреднение y по всевозможным значениям n. В частном случае, если

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i \ ,$$

где x_i - независимо и одинаково распределенные случайные величины, то $\bar{y} = \bar{n} \cdot \bar{x}$.

Дисперсия σ_y^2 определяется следующим образом:

$$\sigma^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \overline{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} - (\bar{n} \cdot \bar{x})^2$$

(1.12)

В данном случае усреднение производится вначале по всевозможным значениям x_i при фиксированных значениях n, а потом при всевозможным значениям n. После преобразований получим:

$$\sigma_y^2 = \sigma_n^2 \bar{x}^2 + \bar{n}\sigma_x^2 ; \ \delta_y = \sqrt{\delta_n^2 + \frac{1}{\bar{n}}\delta_x^2} \ .$$

Например, для пуассоновского распределения n с параметром λ ($\lambda = \bar{n}$)

$$\sigma_n^2 = \bar{n} = \lambda ; \ \delta_y^2 = \delta_n^2 + \frac{1}{\bar{n}}\delta_x^2 = \frac{1}{\lambda}(1 + \delta_x^2) \ .$$

Более изящный вывод для рассматриваемого случая заключатся в следующем. Если $\Theta(j\omega)$ – характеристическая функция случайной величины x_i, то при фиксированном n характеристическая функция y

$$\Phi = [\, j \cdot \omega]_{|n=const} = \Theta^n(j\omega) \ .$$

Усреднение $\Phi = [j\omega]$ по n приводит к следующему выражению:

$\Phi = [j\omega] = \nu[\Theta(j\omega)]$,

(1.13)

где $\nu(z)$ производящая функция числа n:

$\nu(z) = \overline{z^n}$.

Например, для пуассоновского распределения числа n:

$$\nu(z) = \overline{z^n} = \sum_{i=0}^{n} z^i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{\lambda \cdot z - \lambda}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \nu}{\partial z}\Big|_{z=1} = \overline{n}; \ \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} = \overline{n^2} - \overline{n},$$

то

$$\lambda = \overline{n}; \ \sigma_n^2 = \overline{n} = \lambda; \ \delta_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

1.2.2. Модели многоканальной измерительной системы

Рассматривается следующая модель. Имеется N независимых измерений неизвестного значения S, то есть наблюдается случайная величина x_i, для которых

$\overline{x}_i = S$, $i = 1,2...N$;

$\sigma_{X_i}^2 = \sigma_i^2$ - погрешность i-ого измерения.

Итоговая оценка $\dot{S}$ неизвестного параметра S:

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i + B.$$

(1.14)

Иными словами на вход линейной системы N с входами поступают случайные величины x_i, а ее выход является итоговой оценкой неизвестного параметра S. Синтез линейной системы, в этом случае, заключается в выборе таких значений α_i (коэффициентов усиления по i -тому входу), которые бы минимизировали погрешность итоговой оценки $\dot{S}$.

Требования несмещенности оценки $\dot{S}$

$\overline{\dot{S}} = S$

Приводит к следующему выражению:

$$S = S\sum_{i=1}^{N}\alpha_i + B.$$

Поскольку система обработки значений x_i линейная, то ее параметры α_i и В не зависят от значения S . Поэтому выполнение вышеуказанного соотношения возможно только при $B \equiv 0, \sum_{i=1}^{N}\alpha_i = 1$.

Итоговая погрешность оценки неизвестного параметра S

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\left[\dot{S} - S\right]^2} = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2\sigma_i^2 .$$

(1.15)

Отыскание минимума ошибки $\overline{\varepsilon^2}$ по N переменным α_i при условии $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i = 1$ являете задачей линейного программирования. Ограничение в виде равенства позволяет упростить решение задачи оптимизации. Решение этой задачи может быть представлено следующим образом:

$$\alpha_N = 1 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i , \; n = N - 1 .$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sigma_i^2 + (1 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i)\sigma_N^2 .$$

Отыскание минимума ошибки $\overline{\varepsilon^2}$ приводит к системе n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial \alpha_1} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots; \\ \dfrac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial \alpha_n} = 0 \end{cases}$$

Решение которой приводит к следующему правилу выбору весовых коэффициентов α_i:

$$\alpha_i = \frac{\dfrac{1}{\delta_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\delta_i^2}}, \qquad \delta_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{S^2}, \tag{1.16}$$

а минимально достижимая погрешность (ошибка)

$$\overline{\varepsilon^2_{\min}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\delta_i^2}} \cdot S^2 . \tag{1.17}$$

Анализ полученных результатов показывает, что вес i-того измерения обратно пропорционален его погрешности. Отметим, что данный принцип прослеживается и в более сложных ситуациях, в частности, при обнаружении сигналов и измерении их параметров.

1.2.3. Модель цифровой измерительной системы

Рассматривая задачи цифровой оценки $\dot{S}$ неизвестного параметра S по совокупности N независимых измерений $x_i = S + \varepsilon_i$ как выборочного среднего $\dot{S} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^*$, где ε_i - случайная составляющая i-того измерения; x_i^* - результат квантования по уровню величины x_i. Принципиальным отличием поставленной задачи от рассмотренной ранее заключается в следующем. В указанных работах решается задача прохождения случайного сигнала через аналого-цифровой преобразователь (АЦП), причем преследуется цель передачи текущих значение данного сигнала. Это обстоятельство и обуславливает возможность допущения $\frac{\sigma}{\Delta} >> I$, где σ - среднеквадратическое отклонение передаваемого сигнала; Δ - шаг квантования. В нашем же случаи значение ε_i является шумовыми составляющими и их передача нецелесообразна.

Рассматриваемая задача является частной задачей теории статических измерения. Практическая необходимость ее решения обусловлена большим количеством независимых измерений в ряде задач и , как следствие, применением АЦП ограниченной разрядности для их передачи в числительное устройство. Например, при томографическом контроле материалов и изделий с использованием импульсных источников проникающего излучения число независимых измерений одного параметра $N = 10^2 \div 10^4$, а общее число измеряемых параметров составляет $10^5 \div 10^7$ [3].

Целью данной работы является определение погрешности цифрового оценивания неизвестного параметра по совокупности независимых измерений при произвольном соотношении параметров σ и Δ и исследования ее особенностей для гауссова распределения вероятностей величины ε_i как основного типа распределения при решении практических задач.

Квадрат среднеквадратической погрешности оценивания

$$\varepsilon^2 = \overline{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^* - S \right]^2},$$

(1.18)

где плотность случайной величины x^*

$$p(x^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_m \delta(x^* - \Delta m - \frac{\Delta}{2}); \qquad P_m = \int_{\Delta m}^{\Delta(m+1)} f(x)dx;$$

(1.19)

$f(x)$ - плотность распределения вероятностей случайной величины x_i. Представляя $p(x^*)$ как

$$p(x^*)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x^*-\Delta m-\frac{\Delta}{2})\cdot(\int_{x^*-\frac{\Delta}{2}}^{x^*+\frac{\Delta}{2}}f(x)dx),$$

преобразование Фурье от плотности $p(x^*)$

$$P(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k F(\omega-\frac{k}{\Delta})\frac{\sin\pi\Delta(\omega-\frac{k}{\Delta})}{\pi\Delta(\omega-\frac{k}{\Delta})},$$

где $F(\omega)$ - преобразование Фурье от плотности $f(x)$.

В этом случае

$$P'(0)=F'(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[F(\frac{k}{\Delta})-F(-\frac{k}{\Delta})\right];$$

(1.20)

$$P''(0)=F''(0)-2\Delta^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left[F(\frac{k}{\Delta})+F(-\frac{k}{\Delta})\right]+2\Delta^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[F'(\frac{k}{\Delta})-F'(-\frac{k}{\Delta})\right]-$$
$$-\frac{\pi^2\Delta^2F(0)}{3}$$

Тогда погрешность оценивания

$$\varepsilon^2=\overline{(\dot{S}-\dot{\overline{S}})^2}+(\dot{\overline{S}}-S)^2=\varepsilon^2_{cmcm}-\varepsilon^2_{cucm},$$

(1.21)

где систематическая составляющая погрешности измерения

,

(1.22)

а систематическая

$$\varepsilon^2_{сист} = \left[S - \frac{1}{2\pi i} P'(0) \right]^2 .$$

(1.23)

Например, в случае экспоненциального распределения случайной величины $x_i \left(f(x) = \frac{1}{\gamma e^{-\gamma x}}, x \geq 0. \quad S = \frac{1}{\gamma}; \sigma = \frac{1}{\gamma} \right)$

погрешность оценивания из выражений (5-7)

$$\frac{\varepsilon^2}{\Delta^2} = \frac{A - B^2}{N} + (B - \frac{1}{\Delta\gamma})^2 ,$$

(1.24)

где

$$A = \frac{e^{2\Delta\gamma} + \sigma \cdot e^{\Delta\gamma} + 1}{4\left[e^{\Delta\gamma} - 1\right]^2}; \quad B = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\Delta\gamma} + 1}{e^{\Delta\gamma} - 1} .$$

При $N = 1$ выражение (1.24) с точностью до второго порядка малости величины $\Delta\gamma$ совпадает с ранее полученным результатам.

Если предположить, что ε_i распределены согласно закону Лапласа с дисперсией σ_1, то также из выражения (1.21-1.23)

$$\frac{\varepsilon^2}{\Delta^2} = \frac{1}{4sh^2\alpha} \left[(\theta \cdot sh\alpha - sh\theta\alpha)^2 + \frac{2ch\alpha \cdot ch\theta\alpha - sh^2\theta\alpha}{N} \right],$$

(1.25)

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{10}}; \quad \sigma_{10} = \frac{\sigma_1}{\Delta}; \quad \theta = 2S_0 - 2\left[S_0\right] - 1;$$

$S_0 = \frac{S}{\Delta}; [S_0]$ - целая часть величины S_0.

Наиболее полно рассмотрим случай гауссова распределения случайной величины как наиболее распространенного при решении подавляющего числа практических задач. В этом случаи

$$F(\omega) = \exp(-2i\pi S\omega - 2\pi^2\omega^2\sigma^2) .$$

А из выражений (4)-(7)

$$\frac{\varepsilon^2}{\Delta^2}=\frac{1}{N}\left[\sigma_0^2+\frac{1}{12}+\sum\left(\frac{1}{\pi^2k^2}+4\sigma_0^2\right)e^{-2\sigma_0^2\pi^2k^2}\cos 2\pi kS_0-\frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-2\sigma_0^2\pi^2k^2}\sin 2\pi kS_0\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-2\sigma_0^2\pi^2k^2}\sin 2\pi kS_0\right)^2,$$

где $\alpha_1=2\pi\cdot S_0;\alpha_2=2\pi^2\sigma_0^2$.

Результаты численного расчета погрешности $\frac{\varepsilon}{\Delta}$ как функция параметра σ_0 приведена на рис.1

При этом для каждого значения σ_0 выбирались такие значения S_0, которые бы обеспечивали максимум погрешности оценивания. Анализ данных результатов показывает, что при $N>1$ существует такое значение σ_0 при котором погрешность $\frac{\varepsilon}{\Delta}$ минимальна. Это обусловлено уменьшением систематической составляющей погрешности оценивания с ростом оценивания σ_0 при $N>1$. Данная погрешность ε отлична от нуля при $N\to\infty$. Из выражения (1.26)

$$\frac{\varepsilon_{пред}}{\Delta}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{\alpha_2k^2}\cdot\sin\alpha_1k,$$

(1.27)

численные значения которой при значениях S_0, обеспечивающих максимум погрешности, приведены в табл.1

таблица 1.1

σ_0	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5
$\frac{\varepsilon_{пред}}{\Delta}$	0,47	0,38	0,29	0,21	0,15	0,055	0,013	0,0021

С дальнейшим ростом параметра σ_0 погрешность оценивания увеличивается и при $\sigma_0 > 0.8$ погрешность оценивания определяется общеизвестной зависимостью

$$\frac{\varepsilon^2}{\Delta^2} = \frac{\sigma_0^2}{N} + \frac{1}{12N}$$

с погрешностью аппроксимации не более 3% при $N \le 10^4$.

Определить степень относительного увеличения погрешности неизвестного параметра за счет квантования по уровню результатов измерений x_i величиной

$$h_1 = \frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{N},$$

где $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ оценивания неизвестного параметра S при сколь угодно малом значении шага квантования Δ. Значения параметра h_1 приведены в табл.1.2

таблица 1.2

σ_0 / N	0,01	0,05	0,1	0,5	1
1	50	10	5	1,16	1,04
2	66,75	11,29	5,03	1,16	1,03
10	149	24,03	9,30	1,15	1,04
50	332	53,5	20,3	1,16	1,02
100	470	76	28,6	1,17	1,03
1000	1480		90,12	1,17	1,04

Наконец, оценим эффективность применения исследуемого алгоритма оценивания $\dot{S} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^*$ по отношению к алгоритму $\dot{S} = x^*$, где x^* - результат квантования по уровню величины $X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$:

$$h_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1},$$

Где ε_1 - погрешность, определяемая выражением (1.26) при $N = 1$ и $\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{N}}$. Зависимость значений h_2 от σ_0 и N представлена на рис.1.2

Анализ приведенных количественных результатов для гауссова распределения величин x_i позволяет отметить следующее. Существует такое значение погрешности оценивания, которое при фиксированном N минимально. Данное обстоятельство обусловлено аналогичным «усреднению» эффектом. При этом с ростом N указанные значения σ_0 увеличиваются, так как рассматриваемый эффект усиливается. В то же время, при неограниченном увеличении N погрешность ε не стремится к нулю из-за нелинейного характера исследуемого алгоритма оценивания. Сравнительно высокая эффективность применения используемого алгоритма по сравнению с алгоритмом $\dot{S} = X^*$ приводит с следующей рекомендации. Для достижения большой точности оценивания при ограниченном количестве разрядов АЦП предпочтительней квантовать значения x_i, а не их накопленную сумму. Результаты расчетов, представленные на рис.1.2, определяют область максимальной эффективности.

Приведенные результаты дополняют общеизвестные результаты по шумам квантования в области больших «окон» квантования по сравнению со среднеквадратичным отклонения шумовой отклоняющей результатов измерений. Причем сам термин «шум квантования» из-за указанного нелинейного преобразования теряет в этой области первоначальный смысл.

1.2.4. Модели квантовых и информационных систем

Неопределенность в поведении оптоэлектронных и квантовых систем обусловлена наличием в них различных шумов, основными из которых являются квантовые, тепловые и дробовые шумы.

Квантовые шумы порождены дискретностью возможных состояний элементарных частиц и сколь угодно малостью интервала времени перехода из одного состояния в другое. Принципиально важным моментом в данном случае является весьма большое число частиц M, обладающих возможностью перехода из одного состояния в другое, а также малость вероятности p с самого перехода. В то же время, среднее число переходов в единицу времени, равно произведению pM, есть постоянная величина, отличная от нуля. Число n, характеризующее число частиц, перешедших в другое состояние, есть случайная величина. При условии независимости вероятности перехода одной частицы от состояния других частиц, число n характеризуется распределением Бернулли

$$P_i = C_M^i \cdot p^i (1-p)^{M-i},$$

где P_i - вероятность перехода i частиц ($i = 0,1,2..M$). Среднее $\overline{n}$ и дисперсия σ_n^2 числа n равны:

$$\overline{n} = \sum_{i=0}^{M} iP_i = pM$$

(1.27)

$$\sigma_n^2 = \overline{n^2} - \overline{n}^2 = \sum_{i=0}^{M} i^2 P_i - (pM)^2 = pM(1-p);$$

а производящая функция

$$\nu(z) = \overline{z^n} = [1 - p + zp]^M$$

(1.28)

Отметим, что при $M \to \infty, p \to 0 \quad и \quad Mp \to \lambda$

$$P_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda};$$

$$\overline{n} = \sigma_n^2;$$

$$\nu(z) e^{-\lambda + \lambda z}.$$

(1.29)

Иными словами, распределение Бернулли переходит в распределение Пуассона. Распределение Пуассона является базовым не только для квантового шума, но и, как будет показано ниже, для теплового и дробового шумов.

Дробовый шум – это флуктуация тока, вызываемая электронами, которые эмитируются случайно и независимо друг от друга. Если предположить, что время пролета электрона через сечение проводника бесконечно мало, то каждый элементарный импульс тока можно представить как импульс, площадь которого равна электронному заряду, тогда ток в схеме в любой момент времени является импульсным процессом.

$$I(t) = -q\sum_{i=1}^{N}\delta(t-t_i),$$

где q - величина электронного заряда; t_i - момент времени, когда i -тый электрон проходит заданное сечение проводника; N - число электронов в импульсной последовательности за интервал наблюдения ($0, t$). Существенной особенностью данного процесса является его случайный характер, обусловленный случайностями моментов t_i и числа N.

У резистора, который находится в тепловом равновесии с окружающей средой наблюдаются на концах выводов флуктуации либо напряжения (при разомкнутом контуре), либо токи (при короткозамкнутом контуре). Этот шум впервые наблюдал Джонсон и поэтому его обычно называют шумом Джонсона или тепловым шумом. Это явление аналогично броуновскому движению частиц. Электроны в резисторе обладают тепловой энергией и передвигаются в материале случайным образом, испытывая соударения с атомами кристалла. Случайные движения электронов и вызывают тепловой шум флуктуации можно истолковать как результат очень большого числа независимых случайных событий. Каждое событие состоит из начальной стадии, когда происходит отклонение от состояния равновесия, и из релаксации к этому состоянию. Начальная стадия – это пробег электрона между столкновениями, который порождает неравновесное состояние заряда в резистивном материале, а релаксация – последующее изменение заряда, восстанавливающее состояние равновесия.

Если на резистор подать постоянное напряжение, то кроме дробового и теплового шума со спектральной плотностью типа $|f|^{-\alpha}$, где f - частота; α - параметр принимающий значения $0.8 \div 1.4$. Причем, диапазон частот, в котором наблюдается данная зависимость мощности шума от частоты, необычайно широк ($10^{-6} - 10^{6}\,Гц$). Данный шум наблюдается у всех материалов и элементов, используемых в электронике: у собственных полупроводников, приборов на $p-n$ переходах, у металлических пленок, у жидких металлах и растворах электролитов, ламп с термокатодами, у сверхпроводников и переходов Джозефсона. Обычно этот шум называют шум типа $\frac{1}{f}$ шум. Данный шум проявляется не только в электронике, но и в самых различных сферах наблюдения. Это отмечено для таких явлений природы, как землетрясение, грозы, изменения уровня реки Нил. Такой спектр имеют флуктуации периода сердцебиения, волн головного мозга и др. более того спектр большинства музыкальных мелодий (например, Моцарта, Баха, Бетховена) соответствует зависимости $\frac{1}{f}$.

Уже более полвека исследования данного типа шумов не приводят к нахождению физических механизмов его появления, в частности, в электронике. Данное обстоятельство е позволяет разрабатывать математические модели возникновения и преобразования данного типа шумов. По этой причине рассматриваемый тип шумов в данном учебном пособии не рассматривается.

1.2.5. Модель фоторезистора

Кванты света, взаимодействуя с материалом фоторезистор, изменяют его проводимость $q(t)$. отдельный квант света с вероятностью P (вероятностью регистрации) увеличивает проводимость на величину

$$\Delta q = A\left[1(1-t_i) - 1(t - t_i\xi_i)\right]$$

(1.30)

где $A = e\left[\mu_e + \mu_n\right]$;

e - заряд электрона;

μ_e, μ_n - подвижность электронов и «дырок» соответственно;

t_i - момент времени, в который образовалась пара электрон – «дырка»;

$(t_i + \xi_i)$ - момент времени рекомбинации данной пары;

$1(x)$ - функция Хевисайда;

Тогда проводимость $q(t)$ в любой момент времени t .

$$q(t) = A\sum_{i=1}^{N}\left[1(1-t_i)-1(t-t_i-\xi_i)\right]$$

(1.31)

где N - число зарегистрированных квантов на интервале ($0,t$).

Процесс $n(t)=\frac{q(t)}{A}$, является неотрицательным целочисленным случайным процессом, свойства которого и определяют специфичность вероятностной модели фоторезистора.

Совокупность моментов $\{t_i\}$ образуют пуассоновский поток событий с интенсивностью $P\lambda(t)$, где $\lambda(t)$ – интенсивность потока событий, состоящих в попадание в чувствительную область фоторезистора отдельного кванта.

При использовании в качестве материала фоторезистора полупроводника p – типа случайные величины ξ_i между собой независимы и одинаково распределены с плотностью вероятности $f(\xi)$.

Это справедливо даже при условии $\frac{\bar{\tau}P\lambda(t)}{M} << 1$,

где M – число акцепторов в рабочем объеме полупроводника;

$\bar{\tau}$ – среднее время жизни электронов в зоне проводимости.

Тогда производящая функция процесса $n(t)$:

$$\nu(z,t) = \left\langle Z^{n(t)} \right\rangle_{\xi_i t_i N}$$

(1.32)

где символ $\langle Z^{n(t)} \rangle$ означает усреднение выражения в угловых скобках по x.

$$\left\langle Z^{n(t)} \right\rangle_{\xi_i} = \prod_{i=1}^{N} \left\langle Z^{\left[1(1-t_i)-1(t-t_i-\xi_i)\right]} \right\rangle_{\xi_i} = \prod_{i=1}^{N} \int_{0}^{t-t_i} f(\xi)d\xi + z\int_{t-t_i}^{\infty} f(\xi)d\xi$$

(1.33)

то дальнейшее усреднение по t_i и N для пуассоновского потока событий проводится аналогично выражениям (1.10) – (1.12):

$$\nu(z,t) = \exp\left[-P\int_0^t \lambda(\vartheta)d\vartheta + P\int_0^t \lambda(\vartheta)\left[\int_0^{t-\vartheta} f(\xi)d\xi + z\int_{t-\vartheta_i}^{\infty} f(\xi)d\xi\right]d\vartheta\right]$$

(1.33)

Тогда среднее процесса $n(t)$

$$\overline{n(t)} = \frac{\partial\nu(z,t)}{\partial z}\Big|_{z=1} = P\int_0^t \lambda(\vartheta)\int_{t-\vartheta}^{\infty} f(\xi)d\xi d\vartheta = \int_0^t P\lambda(\vartheta)\left[1-F(t-\vartheta)\right]d\vartheta$$

(1.34)

где $F(\xi)$ – функция распределения случайной величины ξ .

Анализ данного выражения показывает, что фоторезистор обладает инерционностью, которую можно представить линейным фильтром с импульсной переходной функцией

$$h(\tau) = 1 - F(\tau)$$

(1.36)

Если $P\lambda(t) = const = \lambda_0$, то

$$\nu(z,t) = \exp\left[-\lambda_0 t + \lambda_0 tz - (z-1)\lambda_0\int_0^t F(\vartheta)d\vartheta\right]$$

(1.37)

а среднее и дисперсия процесса $n(t)$

$$\overline{n(t)} = \lambda_0 t - \lambda_0\int_0^t F(\vartheta)d\vartheta$$

(1.38)

$$\sigma^2_{n(t)} = \lambda_0 t - \lambda_0 \int_0^t F(\vartheta) d\vartheta$$

(1.39)

Относительно флуктуации проводимости фоторезистора

$$\delta_q = \frac{\sqrt{\sigma^2_{n(t)}}}{n(t)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_0 (t - \int_0^t F(\vartheta) d\vartheta)}}$$

(1.40)

Разложим производящую функцию (1.37) в ряд по степеням z. Коэффициенты этого ряда являются вероятностью p_i (вероятность того, что этот процесс $n(t)$ примет значение равное $i, i = 0,1\ldots$):

$$p_i = \frac{1}{i} (\overline{n(t)})^i e^{-\overline{n(t)}}$$

(1.41)

Следовательно, значения процесса 1 в любой момент времени 1 и при любом распределении величины ξ распределены по закону Пуассона.

Если вероятность рекомбинации электрона за единицу времени постоянна, то

$$F(\xi) = 1 - e^{-\alpha\xi}$$

(1.42)

$$f(\xi) = \alpha e^{-\alpha\xi}$$

а из выражений (1.38) – (1.40) при $t \to \infty$

$$\overline{n(t)} = \frac{\lambda_0}{\alpha}$$

(1.43)

$$\sigma^2_{n(t)} = \frac{\lambda_0}{\alpha}$$

$$\delta_q^2 = \frac{\lambda_0}{\alpha}$$

где $\alpha = \frac{1}{\overline{\xi}}$

$\overline{\xi}$ – среднее время жизни электрона в возбужденном состоянии.

Отметим, что рассмотренные модели светодиода, фотодиода и фоторезистора аналогичны моделям систем массового обслуживания, что и позволило использовать общие методы их анализа. Инерционность данных оптоэлектронных приборов приводят к предварительным искажения информационных сигналов в квантовых измерительных системах. Линейность операций данных искажений существенного облегчает их учет и частичную компенсацию, что и будет рассмотрено в четвертной главе пособия.

1.2.6. Модели переноса оптического излечения через поглощающие и инверсные среды

При прохождении света через оптическую среду можно выделить следующее состояния квантовой системы независимо от механизмов взаимодействия света с веществом данной среды. Первое из них заключается в прохождении частиц квантов без взаимодействия.

В этом случаи говорят о поглощении света, хотя помимо непосредственного поглощения в это состояние могут быть отнесены рассеяние света, дифракционные и другие потери света.

Второе из состояний квантовой системы заключается в усилении света при его прохождении через инверсную среду. Характерной особенностью усиления света является появление в результате вынужденных переходов вторичных квантов, идентичных в первом приближении первичным. Такое представление позволяет использовать известные методы построения модели развития биологических систем, в частности, процессов роста и гибели биологической популяции, при анализе квантовых систем.

Поскольку число квантов $n(x)$ на выходе среды есть величина дискретная, то достаточно полной характеристикой процесса $n(x)$ является его производящая функция $\nu(z,x)$, где x – пространственная координата среды по направлению просвечивания. Случайный характер поглощения и усиления света при его прохождении через оптические среды и недостаточность для проектирования и анализа приборов определения лишь среднего $\overline{n(x)}$ предопределяют использование специальных методов исследования свойств процесса $n(x)$. Данный процесс $n(x)$ относится к процессам с непрерывным временем и дискретным набором состояний. Важнейшим свойством рассматриваемого процесса является его принадлежность к ласу так называемых Марковских случайных процессов. Формальное определение марковости случайных процессов заключается возможности представления многомерной плотности распределения процесса $n(x)$ в виде произведения двумерных плотностей распределения этого процесса. Физически это означает, что значения процесса $n(x_1 + \Delta x)$ коррелированны только со значениями $n(x_1)$ и не зависит от значений процесса в точках x, предшествующих значению аргумента x_1. Это позволяет построить систему дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), решение которой и определяет характеристики процесса $n(x)$. Методы построения и решения данной системы уравнений достаточно хорошо отражены в специальной литературе. Наиболее просто и доступно для широкого круга читателей они изложены в монографии А.Т. Баруча-Рида.

Таким образом, в данном разделе исследуется следующая физическая модель. На вход оптической среды поступает пуассоновская последовательность квантов произвольной неотрицательной последовательности 1 и определяются вероятностные свойства последовательности квантов на ее выходе. Поправка в значении 1 отражающую способность входной границы раздела оптических сред вводится сравнительно просто с использованием понятия коэффициента отражения границы раздела двух оптических сред. Учет отражательной способности выходной границы раздела оптических сред является более сложной задачей, и она будет рассмотрена в данном разделе. Учет же отражательных способностей входной и выходной границ инверсных оптических сред выходит за рамки данного учебного пособия.

Наиболее наглядным и технически простым способом решения системы уравнений Колмогорова является их преобразование в интегральное уравнение: методы преобразования достаточно полно изложены в работах С. Карлина, А.Т. Баруча-Рида. Отметим, что используемые модели поглощения и усиления света в оптических средах идентичным моделям процессов рождения и гибели в биологических системах. Это становится возможным при представлении последовательности квантов на выходе среды как потока событий кратных точек.

1.2.7. Модели поглощающей и инверсной среды

Предполагается, что квант света при прохождении интервала $(x, x+\Delta x)$ может либо поглотиться с вероятностью $\mu(x)\Delta x$, либо усилиться за счет вынужденного перехода с излучением с вероятностью $\beta(x)\Delta x$, либо остаться без изменения с вероятностью $1-[\mu(x)+\beta(x)]\Delta x$. Параметры $\mu(x)$ и $\beta(x)$ –линейные коэффициенты ослабления и усиления света соответственно. Между параметрами $\mu(x)$ и $\beta(x)$ существует взаимосвязь, обусловленная известными соотношениями между коэффициентами Эйнштейна для вынужденных переходов с излучением и поглощением. Предполагается, что данные коэффициенты не зависят от интенсивности света, поступающие на вход оптической среды.

При этих условиях система уравнений Колмогорова имеет вид

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \beta(x)[n-1]P_{n-1}(x) - n[\mu(x)+\beta(x)]P(x) + \mu(x)[n+1]P_{n+1}(x)$$

(1.44)

$n = 1,2...,$

где $P(x)$ - вероятность события, состоящего в том, что через произвольное сечение среды с координатой x пройдет n квантов. При $n=0$ имеет место уравнение

$$\frac{dP_0(x)}{dx} = \mu(x)P_1(x)$$

(1.45)

Из выражения (1.44) и (1.45) следует

$$\frac{\partial \nu_0(z,x)}{\partial x} = \left[\beta(x)z^2 - \beta(x)z - \mu(x)z + \mu(x)\right]\frac{\partial \nu_0(z,x)}{\partial z}$$

где произвольная функция

$$\nu_0(z,x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n$$

(1.46)

После преобразования выражения (1.46)

$$\nu_0(z,x) = \int_0^x \mu\left[(\tau) + \beta(\tau)\nu_0^2(z,x-\tau)\right]e^{-\int_0^\tau [\mu(\theta)+\beta(\theta)]d\theta} d\tau + e^{-\int_0^x [\mu(\tau)+\beta(\tau)]d\tau}$$

(1.47)

Если на вход оптической среды поступает N_0 квантов света, то в силу их независимого поведения производящая функция общего числа $N(x)$ квантов света на выходе среды

$$\nu(z,x) = \nu_0^{N_0}(z,x),$$

(1.48)

Общее решение уравнение (1.47) для оптической среды с произвольными параметрами $\mu(x)$ и $\beta(x)$ не представляются возможными.

Для поглощения среды $\beta(x) = 0$ из выражения (1.47)

$$\nu_0(z,x) = 1 - (1-z)e^{-\int_0^x \mu(\tau)d\tau}$$

(1.49)

Тогда из выражения (1.48) и (1.49)

$$\overline{N(x)} = \frac{\partial \nu(z,x)}{\partial z}\bigg|_{z=1} = N_0 e^{-\int_0^x \mu(\tau)d\tau}$$

(1.50)

$$\sigma_N^2 = \frac{\partial^2 \nu(z,x)}{\partial z^2}\Big|_{z=1} + \overline{N(x)} - \overline{N(x)^2} = N_0\left[e^{-\int_0^x \mu(\tau)d\tau} - e^{-2\int_0^x \mu(\tau)d\tau}\right]$$

(1.51)

Выражение (1.50) для определения среднего числа квантов света на выходе поглощающей оптической среды представляет собой закон Бугера для ослабления излучения в оптической неоднородной среде. Если N_0 представляет среднее число квантов в единицу времени поступающих в единичную площадку оптической среды, то умножая левую и правую части выражения (1.50) на энергию кванта света, получим закон Бугера в общепринятой форме.

$$I(x) = I_0 e^{-\int_0^x \mu(\tau)d\tau}$$

(1.52)

Выражение (1.52)представлено как

$$\int_0^x \mu(\tau)d\tau = \ln\frac{I_0}{I}$$

Обеспечивает сведение задачи восстановления изображения двумерного коэффициента поглощения по интегральным проекциям в вычислительной томографии к задаче решения системой линейных алгебраических уравнений.

Дальнейший анализ производящей функции $\nu_0(z,x)$, определяемой выражение (1.47), возможен, в частности, в случае однородности оптической среды $\mu(x)=\mu$ и $\beta(x)=\beta$. Тогда

$$\nu_0(z,x) = \int_0^x \left[\mu + \beta\nu_0^2(z, x-\tau)\right]e^{-(\mu+\beta)\tau}d\tau + e^{-(\mu+\beta)x}$$

(1.53)

Данное интегральное уравнение можно свети к дифференциальному путем дифференцирования по x его левой и правой части:

$$\frac{\partial\nu_0(z,x)}{\partial z} = \beta\nu_0^2(z,x) - (\beta+\mu)\nu_0(z,x) + \mu$$

(1.54)

Решение данного уравнение при начальном условии $\nu(z,0)=z$ приводит следующему выражению для искомой производящей функции:

$$\nu(z,x)=\frac{1-e^{(\beta-\mu)x}-z(\frac{\beta}{\mu}-e^{(\beta-\mu)x})}{1-\frac{\beta}{\mu}e^{(\beta-\mu)x}-z\frac{\beta}{\mu}(1-e^{(\beta-\mu)x})}$$

(1.55)

Из которого среднее и дисперсия числа квантов света на выходе среды при поступлении на ее вход N_0 квантов света соответственно равны:

$$\overline{N(x)}=N_0e^{(\beta-\mu)x}$$

(1.56)

$$\sigma_N^2=N_0\frac{\beta+\mu}{\beta-\mu}e^{(\beta-\mu)x}\left[e^{(\beta-\mu)x}-1\right]$$

(1.57)

Выражение (1.56) отражает закон роста и гибели биологической популяции (закон Мальтуса). Вероятность полного поглощения поступивших на вход N_0 квантов

$$P_0(x)=\nu_0^{N_0}(0,x)=\left[\frac{1-e^{(\beta-\mu)x}}{1-\frac{\beta}{\mu}e^{(\beta-\mu)x}}\right]^{N_0}$$

(1.58)

При достаточно больших значениях параметра x

$$P_0(x)=\begin{cases}1,\beta<\mu\\ \left(\frac{\mu}{\beta}\right)^{N_0},\beta>\mu\end{cases}$$

(1.59)

Если в оптической среде поглощение отсутствует ($\mu = 0$), то из выражения (1.55)

$$\nu_0(z,x) = \frac{ze^{-\beta x}}{1 - z(1 - e^{-\beta x})}$$

(1.60)

А среднее $\overline{N(x)}$, дисперсия σ_n^2 и относительная флуктуации δ_N равны:

$$\overline{N(x)} = N_0 e^{\beta x};\ \sigma_N^2 = N_0 e^{\beta x}(e^{\beta x} - 1);$$

$$\delta_N = \frac{\sqrt{\sigma_N^2}}{\overline{N(x)}} = \sqrt{\frac{1}{N_0}(-e^{-\beta x})}$$

(1.61)

Раскладывая в ряд по степеням z^n производящую функцию (1.60), определим вероятность $p_n(x)$ появления n квантов света на выходе оптической среды при поступлении на ее вход одного кванта света:

$$P_n(x) = e^{-\beta x}(1 - e^{-\beta x})^{n-1}; n = 1,2,..$$

(1.62)

Данное распределение вероятностей называется распределение Паскаля.

Таким образом последовательность квантов на выходе оптической среды сохраняет структуру выходной последовательности. Иными словами, производящий функционал выходной последовательности квантов света сохраняет вид производящего функционала выходной последовательности, а процессы поглощения и усиления находят свое отражение в так называемой кратности событий. Для процессов поглощения данная кратность определяется производящей функцией (1.49). Из вида данной функции следует, что величина $\exp\left[\int_0^x \mu(\tau)d\tau\right]$ может быть представлена как вероятность прохождения через среду кванта света.

Для процессов совместного поглощения и усиления кратность потока событий определяется производящей функцией (1.55). принятые допущения относительно фотоприемника позволяют представить его отклик на такую последовательность квантов света как последовательность электрических сигналов той же кратности.

Наличие границы раздела оптических сред с различными показателями преломления значительно трансформируют производящую функцию $\nu_0(z,x)$ кратности рассматриваемого потока событий. Поясним вычисление производящей функции $\nu^*(z,x)$ после прохождения света через границу раздела двух сред с коэффициентом отражения k . поскольку производящая функция

$$\nu_0(z,x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n z^n \text{ ;}$$

то для определения производящей функции

$$\nu^*(z,x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n^* z^n$$

Необходимо установить связь между p_n и p_n^*, где p_n^* – вероятность появления n квантов света после прохождения границы раздела двух сред. Непосредственно из определения вероятности p_n^*

$$p_0^*=p_0+kp_1+k^2p_2+..=\sum_{i=1}^{\infty}k^i p_i=\nu_0(k,x)$$

(1.63)

$$p_0^*=\sum_{i=n}^{\infty}c_i^n(1-k^i)p_i, n=1,2,..$$

Для поглощающей среды из выражения (1.49) и (1.63) производящая функция

$$\nu_0^*(z,x)=1-(1-z)ke^{-\int_0^x \mu(\tau)d\tau}$$

(1.64)

Вычисление производящей функции $\nu^*(z,x)$ для общего случая представляет значительные технические сложности.

2. Модели информационных систем с переменными во времени сигналами

2.1. Общая характеристика систем

В данном случае полезные и шумовые сигналы представляют собой, в общем случае, выборочные функции случайных процессов.

Случайный процесс $X(t)$ однозначно в вероятностном смысле может быть задан совместной многомерной плотностью вероятностей значений $X(t_i), i = 1,2,..n$ при неограниченном росте числа n или Фурье –образом данной плотности. Примером такого задания является характеристический функционал нормального (гауссова) случайного процесса.

Существует такой целый класс случайных процессов, полные характеристики которого однозначно могут быть заданы в явном виде. Это так называемые процессы, порожденные импульсной последовательностью. Примером такого процесса является процесс на выходе сглаживающего фильтра фотоприемника.

В то же время, в большинстве инженерных задач требование полного определения в вероятностном смысле случайного процесса не является обязательным. Типичным примером такой ситуации является анализ и синтез линейных информационных систем. В этом случае для подавляющего большинства инженерных задач достаточно лишь знать моменты первого порядка (среднее случайн6ого процесса) и смешанный момент второго порядка (корреляционную функцию случайного процесса).

Операция усреднения в теории случайных процессов в общем случае является усреднением по множеству N возможных реализаций:

$$\overline{X(t)} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \qquad (2.1)$$

где $x_i(t)$ – реализация случайного процесса $X(t)$.

Для стационарных случайных процессов среднее по времени тождественно усреднению по множеству реализаций

$$\overline{X(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_i(t)dt = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$$

В дальнейшем будет использована для анализа и синтеза информационных моделей в основном стационарные случайные процессы.

Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$

$$B(\tau) = \overline{X(t)X(t+\varepsilon)} - \overline{X(t)}^2 \qquad (2.2)$$

Иными словами мерой связанности двух значений случайного процесса является отличие среднего произведения двух случайных величин от произведения их средних.

Для стационарных случайных процессов корреляционная функция является четной функцией:

$$B(\tau) = B(-\tau)$$

А ее значение при $\tau = 0$ соответствует дисперсии случайного процесса

$$B(0) = \sigma^2$$

При нулевом среднем случайного процесса его дисперсия есть энергия переносимая данными процессами.

Принципиально важным для инженеров является следующее утверждение (теория Винера - Хинчина): Фурье – преобразование от корреляционной функции определяет энергетический спектр случайного процесса $S(\omega)$:

$$S(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (2.3)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{-j\omega\tau}d\omega$$

В случае четности функции $B(\tau)$

$$S(\omega) = 4\int_0^{\infty} B(\tau)\cos\omega\tau d\tau \qquad (2.4)$$

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} S(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

Средняя мощность стационарного процесса

$$B(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}S(\omega)d\omega$$

Характеристики случайного процесса $Y(t)$ на выходе линейного инерционного фильтра с постоянными параметрами определятся из соотношения

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau \tag{2.5}$$

где $h(\tau)$ – импульсная переходная функция линейного фильтра. Тогда, используя свойство линейности операции усреднения, получим

$$\overline{Y(t)}=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\overline{X(t-\tau)}d\tau \tag{2.6}$$

И для стационарных случайных процессов $X(t)$ среднее $X(t)=a$

$$\overline{Y(t)}=a\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

Для устойчивых линейных систем среднее выходного сигнала в установившемся режиме равно постоянной величине.

Корреляционная функция выходного процесса

$$R(\tau)=\overline{Y(t)Y(t+\tau)}-\overline{Y(t)}\cdot\overline{Y(t+\tau)}$$

Тогда после преобразования при $t\to\infty$ получим

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)h(\upsilon)B(u+\tau-\upsilon)dud\upsilon$$

Если в данном выражении найти Фурье – преобразование от левой и правой частей, то спектр выходного сигнала

$$S_y(\omega)=S_x(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2 \tag{2.7}$$

где $H(j\omega)$ – передаточная функция линейного фильтра. Данное выражение упрощает вычисление корреляционной функции случайного процесса на выходе линейной системы.

Задача определения характеристик случайных процессов на выходе не линейных фильтров общего решения не имеет. Известны только методы и приемы ее решения для частных случаев. Например, данная задача допускает некую универсальность метода ее решения для гауссовских случайных процессов и представления нелинейного фильтра как последовательное включение безынерционного нелинейного и инерционного линейных звеньев. В данном учебном пособии приведен анализ нелинейного преобразователя импульсной последовательности.

2.2. Модели систем фильтрации случайных сигналов

В данном случаи информационными являются значения случайного сигнала $s(t)$. Оценка этих значений принимается по совокупности наблюденных значений случайного процесса $X(t)$:

$$X(t) = s(t) + n(t)$$

то есть, оценка

$$^{\cdot}s(t) = L[X(u)]$$

где $n(t)$ – « мешающий» случайный сигнал. В классе линейных систем обработки значений процесса $X(t)$

$$^{\cdot}s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) X(t-\tau) d\tau \tag{2.8}$$

Критерием оптимальности обработки наблюдаемых значений процесса $X(t)$ является минимум среднеквадратической погрешности

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{[s(t) - {}^{\cdot}s(t)]^2} \to \min_{h(\tau)} \tag{2.9}$$

При этих условиях решение задачи фильтрации случайного сигнала по минимуму среднеквадратической погрешности сводится к отысканию к такой импульсной переходной функции $h(\tau)$, которая бы обеспечивала минимум указанной погрешности (ошибки).

Рассматриваемая ошибка при $\overline{s(t)} = 0$ и $\overline{n(t)} = 0$ при 1

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\left[s(t) - \int_{-\infty}^{t} h(\tau) X(t-\tau) d\tau \right]^2} = \sigma_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) h(\theta) [B_s(\tau-\theta) + B_n(\tau-\theta)] d\tau d\theta -$$

$$- 2\int_{-\infty}^{t} h(\tau) B_s(\tau) d\tau$$

Минимизация функционала ошибки $\overline{\varepsilon^2}$ различными методами (например, методом функциональной производной) приводит к следующему интегральному уравнению при $t \to \infty$

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\upsilon)\left[B_s(\upsilon - \tau) + B_n(\upsilon - \tau)\right]d\upsilon$$

а ошибка

$$\overline{\varepsilon^2} = \sigma_s^2 - \int_{-\infty}^{t} h(\tau)B_s(\tau)d\tau$$

(2.10)

где $\sigma s2$ – дисперсия сигнала $s(t)$; $B_s(u)$ и $B_n(u)$ – корреляционная функция «полезного» $s(t)$ и «мешающего» $n(t)$ сигналов.

Данное уравнение, определяющее оптимальную импульсную переходную функцию, носит наименование уравнение Винера – Хопфа, а фильтрация в целом – винеровской фильтрацией.

Решение уравнение Винера – Хопфа при снятии требования физической реализации оптического фильтра не представляет трудностей:

$$H(j\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)}$$

(2.11)

Где $H(j\omega)$ – передаточная функция оптимального фильтра; $S_s(\omega)$ – спектр «полезного» сигнала; $S_n(\omega)$ – спектр «мешающего» сигнала $s(t)$. Минимальная ошибка

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{S_s(\omega)S_n(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)}d\omega$$

(2.12)

Анализ этих результатов показывает, что фазовая характеристика оптимального фильтра равна нулю, а ошибка оценивания тем меньше, чем перекрываются энергетические спектры сигнала и помехи. Напомним, что условие физической реализуемости фильтра

$h(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$

То есть отклик фильтра не наступает раньше начала воздействия на него. Физически нереализуемый фильтр можно реализовать, допуская задержку в выдаче оценок значений сигнала $s(t)$.

Для нахождения физически реализуемого фильтра необходимо решать уравнение Винера – Хопфа следующего типа

$$B_s(\tau) = \int_0^\infty h(\upsilon)\left[B_s(\upsilon - \tau) + B_n(\upsilon - \varepsilon)\right]d\upsilon$$

Которое не позволяет выразить общее решение в явном виде.

Рассмотри конкретный пример. Пусть

$B_\tau(u) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$; $B_n(\tau) = N_0\delta(\tau)$

то есть помеха $n(t)$ – «белый» шум со спектральной плотностью N_0. Тогда из выражений (2.11) и (2.12)

$$H(j\omega) = \frac{\alpha^2 M}{\alpha^2(1+M)+\omega^2}$$

(2.13)

$$\varepsilon^2_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1+M}}$$

(2.14)

Где $M = \dfrac{2\sigma^2}{\alpha N_0}$ – отношение сигнала и шума в единичной полосе частот.

Построение физически реализуемого фильтра приводит к необходимости решения следующего уравнения:

$$\sigma^2 e^{-\alpha\tau} = \int_0^\infty h(u)\sigma^2 e^{-\alpha|\tau-u|}du + N_0 h(\tau)$$

Данное интегральное уравнение является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Его решение можно найти дважды продифференцировав левую и правую части по переменной τ и выразив из полученного выражения

$$\int_0^\infty h(u)\sigma^2 e^{-\alpha|\tau-u|}d\tau\ ,$$

Получив, таким образом, дифференциальное уравнение

$$h'' - \alpha^2(1+M)h = 0$$

Общее решение данного дифференциального уравнения

$$h(\tau) = C_1 e^{-\alpha\sqrt{1+M}\tau} + C_2 e^{\alpha\sqrt{1+M}\tau}$$

$C_2 \equiv 0$ из условия устойчивости сглаживающего фильтра. C_1 находится путем подстановки найденного решения в исходное интегральное уравнение при $\tau = 0$

$$C_1 = \frac{\sigma^2}{N_0} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{M}{2(1+\sqrt{1+M})}}$$

Таким образом, оптимальный фильтра в физически реализуемом фильтре представляет собой усилитель последовательно соединенный с RC – фильтром (интегрирующей RC - цепью).

Ошибка оценивания в этом случае из ()

(2.15)

Среднее ошибок для физически реализуемых и физически нереализуемых систем показывает, что использование «будущих» значений процесса $X(t)$ уменьшает ошибку оценивания «настоящих» значений сигнала $s(t)$. Отметим, что при большем уровне шума ($M \to 0$) выигрыш незначителен, а при низком уровне шума ($M >> 1$) использование физически нереализуемого фильтра уменьшает квадрат ошибки оценивания в два раза.

2.3. Модели измерительной системы со случайными параметрами

Рассматривается задача построения оптимальной по минимуму средне-квадратической погрешности $\overline{\varepsilon^2}$ линейной оценки $\dot{S}$ уровня сигнала S в условиях «белого шума» $n(t)$ со спектральной плотностью $N(t)$ и случайного интервала T времени наблюдения аддитивной смеси сигнала S и шума $n(t)$:

$$\dot{S} = \int_0^T \alpha(t)\left[S + n(t)\right]dt\,,$$

(2.16)

где $\alpha(t)$ – весовая функция. Данная задача возникает, например, при измерении уровня доплеровского сигнала в турбулентных средах, измерений толщины материала, просвечиваемого немоноэнергетическим излучением, при построении оценки неизвестного параметра по случайной совокупности неравноточных измерений и решении связанных с ними вопросов. Целью данного сообщения является определение весовой функции $\alpha(t)$ и погрешности оценивания уровня сигнала в указанных условиях измерения и интерпретация полученных результатов для ряда условий оценивания.

Из определения среднеквадратической погрешности оценивания $\overline{\varepsilon^2}$ параметра S

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(S - \dot{S})^2}$$

(2.17)

И выражения (2.16) после преобразования получим

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_0^\infty \alpha^2(\tau)N(\tau)g(\tau)d\tau + S^2\int_0^\infty f()\left[\int_0^T \alpha(x)dx - 1\right]^2 d\tau$$

(2.18)

где $f(T)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины $T(T >> 0); g(\tau) = \int_\tau^\infty f(x)dx$. минимизация выражения (2.18) по совокупности физически реализуемых весовых функций $\alpha(t)$ приводит к интегральному уравнению Вольтера второго порядка с выраженным ядром:

$$\int \alpha(\tau)[g(\tau)-g(t)]d\tau = \alpha(t)N_0(t)g(t)-g(t)+C$$

(2.19)

где $N_0(t)=\dfrac{N(t)}{S_0}; C=\int_0^\infty g(x)\alpha(x)dx$. решение данного интегрального уравнения относительно функции $\alpha(t)$, по существу, означат построение оптимальной по минимуму среднеквадратической погрешности линейной оценки уровня сигнала S. Достигаемая при этом среднеквадратическая погрешность может быть вычислена путем домножения обеих частей уравнения (2.19) на $\alpha(t)$ и их интегрирования на интервале ($0,\infty$):

$$\overline{\varepsilon_0^2} = N_0(0+)\alpha_{opt}(0+)$$

(2.20)

или в другой форме:

$$\overline{\varepsilon_0^2} = 1-\int_0^\infty \alpha_{opt}(x)g(x)dx$$

где $\overline{\varepsilon^2}=\dfrac{\overline{\varepsilon^2}}{S^2}; \alpha_{opt}(0+), N_0(0+)$ – предел справа функции $\alpha_{opt}(t)$ и $N_0(t)$ при $t\to 0$. Ошибку оценивания $\overline{\varepsilon_0^2}$, определяемую выражением (2.18) после преобразования представим следующим образом:

$$\overline{\varepsilon_0^2} = \int_0^\infty \left\{ y^2(x)N_0(x)g(x)+f(x)[y(x)-1]^2 \right\} dx$$

(2.21)

где $y(x)=\int_0^x \alpha(\tau)d\tau$. экстремаль выражения (2.21) удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial y'}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0$$

(2.22)

где Φ – подынтегральная функция выражения (2.21), заключенная в фигурные скобки. Это позволяет решение интегрального уравнения (2.19) свести к решению относительно $y(x)$ дифференциального уравнения

$$y''N_0 g + y'(N_0' g + N_0 g') + g'(y-1) = 0$$

(2.23)

Уравнение (2.23) можно представить в виде дифференциального уравнения Риккати:

$$N_0 g u' + N_0 g u^2 + u(N_0 g' + g' N_0) + g' = 0$$

(2.24)

полученного из (2.23) путем подстановки

$$y(x) = 1 - e^{\int_0^x u(\tau)d\tau}$$

В частном случае, при $T = \Delta n$, где n – целочисленная случайная величина ($n = 0,1,2....$), Δ – фиксированный интервал времени и $N(t) = N_i$ – постоянны на любом j-том интервале времени Δ уровень «белого шума», оценка

$$\dot{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \dot{S}_n, \alpha_0 = 0$$

(2.25)

где α_n – весовые коэффициенты; $\dot{s}_n = S + \xi_i, \xi_i$ – независимые случайные величины с нулевым средним и дисперсией $\sigma_i^2 = \dfrac{N_i}{\Delta}$. решаемая задача в данном случае может быть представлена как задача построения линейной оценки неизвестного параметра по случайной совокупности независимых неравноточных измерений. При этом параметр σ_i^2 может рассматриваться как погрешность i-того измерения, а $\overline{\varepsilon_0^2}$ – итоговая погрешность оценивания неизвестного параметра S. В этом случае непосредственно из выражения (2.17) и (2.25)

$$\overline{\varepsilon_0^2} = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \alpha_m^2 \delta_m^2 + \sum_{m=1}^{\infty} p_m (\sum_{k=1}^{m} \alpha_k - 1) + p_0$$

(2.26)

где p_m – вероятность события, состоящего в том, что длительность интервала наблюдения $T = \Delta m$; $P_m = \sum_{i=m}^{\infty} p_i$, $\delta_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{S^2}$. Минимизация выражения (2.26) по совокупности весовых коэффициентов $\{\alpha_m\}$ приводит к рекуррентному уравнению относительно неизвестных β_m:

$$\beta_m (P_m \delta_m^2 + P_{m+1} \delta_{m+1}^2 + p_m) - P_m \delta_m^2 \beta_{m-1} - P_{m+1} \delta_{m+1}^2 \beta_{m+1} = 0$$

(2.27)

где $\beta_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k - 1; \beta_0 = -1$. достигаемая при этом погрешность оценивания неизвестного параметра S

$$\overline{\varepsilon_0^2} = p_0 + P_1 \delta_1^2 \alpha_{1opt}$$

(2.28)

где α_{1opt} – значение весового коэффициента α_1, определяемое из рекуррентного уравнения (2.27).

Рассмотрим конкретные примеры решения рассматриваемой задачи.

1.Пусть $f(T) = d_1 \delta(T - T_1) + d_2 \delta(T - T_2); d_1 + d_2 = 1; T_2 >> T_1$. Тогда из выражений (2.19) и (2.20)

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{N_0(t)} \cdot \frac{1 + d_1 A_2}{1 + A_1 + A_2 + d_1 A_2 A_1}, 0 \le t \le T_1 \\ \frac{1}{N_0(t)} \cdot \frac{1}{1 + A_1 + A_2 + d_1 A_2 A_1}, T_1 \le t \le T_2 \\ 0, t > T_2 \end{cases}$$

$$\overline{\varepsilon_0^2} = \frac{1 + d_1 A_2}{1 + A_1 + A_2 + d_1 A_2 A_1}$$

где $A_1 = \int_0^{T_1} \frac{dx}{N_0(x)}$, $A_2 = \int_0^{T_2} \frac{dx}{N_0(x)}$. При $d_1 = 1$ или $T_2 = T_1$ весовая функция и погрешность оценивания соответственно равны

$$\alpha(t) = \frac{c_0}{N_0(t)}, 0 \le t \le T_1, \overline{\varepsilon_0^2} = c_0,$$

где $$c_0 = \frac{1}{1 + \int_0^{T_1} \frac{dx}{N_0(x)}}$$

2.Допустим, что $f(T) = \gamma e^{-\gamma T}, T \ge 0, N(t) = N_0 = const$. В этом случае весовая функция и погрешность оценивания соответственно равны

$$\alpha(t) = \kappa e^{-\kappa t}, t \ge 0; \overline{\varepsilon_0^2} = \kappa N_0$$

(2.31)

где $$\kappa = \frac{2}{N_0\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4}{N_0 \gamma}}\right]}$$

3.Предположим, что интервал наблюдения T – дискретная случайная величина ($T = \Delta n$, Δ – фиксированная величина с заданным рядом распределения p_n). Исследуем отдельные варианты рассматриваемого случая.

3.1Допустим, что $p_N = q$ и $p_{N_2} = 1 - q$. В этом случае из выражений (2.27) и (2.28)

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{\delta_i^2} \cdot \frac{q(a_2 - a_1) + 1}{q a_1(a_2 - a_1) + a_2 + 1}, 1 \le i \le N_1 \\ \frac{1}{\delta_i^2} \cdot \frac{1}{q a_1(a_2 - a_1) + a_2 + 1}, N_1 \le i \le N_2 \\ 0, i > N_2 \end{cases}$$

$$\overline{\varepsilon_0^2} = \frac{q(a_2 - a_1) + 1}{q a_1 (a_2 - a_1) + a_2 + 1}$$

(2.32)

где $a_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1}{\delta_i^2}$; $a_2 = \sum_{i=1}^{N_2} \frac{1}{\delta_i^2}$. В простейшем случае при $N_2 = N_1$

$$\alpha_i = \frac{1}{\delta_i^2} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1}{\delta_i^2}}; \qquad \overline{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1}{\delta_i^2}}$$

(2.33)

В случае равноточных измерений из выражения (2.33)

$$\alpha_i = \frac{1}{\delta^2 + N_1}; \qquad \overline{\varepsilon_0^2} = \frac{\delta^2}{\delta^2 + N_1}$$

(2.34)

Выражения (2.33) и (2.34) являются аналогами известных результатов в теории ошибок измерений.

3.2Пусть $p_n = (1-a)a^n, 0 < a < 1, n = 0,1,2....$, а отдельные измерения равноточные ($\delta_i^2 = \delta^2$). Тогда уравнение (2.27) запишется следующим образом

3.3 $\beta_n\left[\delta^2(1+a) + 1 - a\right] - \beta_{n-1}\delta^2 - \beta_{n+1} a \delta^2 = 0$

Данное уравнение является уравнением рекуррентным с постоянными коэффициентами. Общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид:

$\beta_m = \lambda_1^u c_1 + \lambda_2^u c_2, \lambda_1 \le \lambda_2$,

где C_1, C_2 - постоянные; λ_1, λ_2 - корни характеристического уравнения $a\delta^2\lambda^2 - \lambda\left[\delta^2(1+a) + 1 - a\right] + \delta^2 = 0$.

Постоянная $C_2 = 0$, так как в противном случае $\overline{\varepsilon_0^2} \to \infty$ при $\delta^2 \to 0$ и любом конечном значении постоянной C_1. Постоянная $C_1 = -1$ из условия $\beta_0 = 1$

.

Из выражений (2.27) и (2.28) получим

$$\alpha_i = (1-\lambda_1)\lambda_1^{i-1}, i \ge 1; \overline{\varepsilon_0^2} = 1 - a + a\delta^2(1-\lambda_1),$$

(2.35)

где

$$\lambda_1 = \frac{\delta^2(1+a) + (1-a) - \sqrt{(1-a)\left[(\delta^2+1)^2 - a(\delta^2-1)^2\right]}}{2a\delta^2}$$

Из выражения (2.35) при $\delta^2 = 0$

$$\overline{\varepsilon_0^2} = 1 - a; \alpha_1 = 1, i = 2,3\ldots.$$

2.4. Модель системы восстановления непрерывного случайного сигнала по дискретной импульсной последовательности

Рассматриваемая зада линейной оценки по минимуму среднеквадратичной ошибки текущих значений выборочной функции $x(t)$ случайного процесса $X(t)$ по наблюдаемым в случайные моменты времени t_i их значениям $x(t_i)$:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} x(t_i)h(t,t_i)$$

(2.36)

где $h(t,\tau)$ – весовая функция сглаживающего фильтра; N – число импульсов на интервале $(0,t)$. Данная задача возникает, например, при оценки текущих значений коэффициента передачи тракта сцинтилляционного детектора ионизирующих излучений. В этом случае $x(t_i)$ - значение коэффициента передачи тракта в моменты t_i случайность которых обусловлена как источником излучения, так и неоднородностью просвечиваемой среды. Целью данного раздела является решение этой задачи при произвольном потоке однородных событий $\{t_i\}$, что позволяет использовать получаемые результаты при разработке широкого класса практических задач.

Определение ошибки восстановления сигнала $x(t)$

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{x^2(t)} - \overline{2x(t)x(t)} + \overline{x^2(t)}$$

(2.37)

Может быть осуществлено путем обобщения известного результата по определению параметров случайного процесса, порожденного импульсной последовательностью, на случай сглаживающего фильтра со случайным во времени коэффициентом усиления:

$$\Phi[u] = \left\langle L\left[\exp\int_0^t u(t)x(\tau)h(t,\tau)dt - 1\right]\right\rangle_{x(t)}$$

(2.38)

где $\Phi[u]$ - характеристический функционал формируемой оценки; $L[u]$ - производящий функционал потока событий $\{t_i\}$; $\langle\cdot\rangle_{x(t)}$ - символ усреднения по всевозможным значениям сигнала $x(t)$. Тогда из выражения (2.36 - 2.38) при $\overline{x(t)} = 0$

$$\frac{\overline{\varepsilon^2(t)}}{\overline{x^2(t)}} = 1 - 2\int_0^t g_1(\tau)\rho(t,\tau)h(t,\tau)d\tau + \int_0^t g_1(\tau)h^2(t,\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^t [g_1(\tau)g_1(\theta) + g_2(\theta)]$$
$$\rho(\tau,\theta)h(t,\tau)h(t,\theta)d\tau d\theta$$

где $\rho(t_1,t_2)$ – коэффициент корреляции сигнала $x(t)$; $g_n(t_1,\ldots,t_n)$, $n = 1,2$ - корреляционные функции n -ого порядка потока событий $\{t_i\}$:

$$g_n(t_1,\ldots,t_n) = \frac{\delta^n L[u]}{\delta u(t_1)..\delta u(t_n)}\Big|_{u=0}$$

Минимизация функционала ошибки $\varepsilon^2(t)$ приводит к интегральному уравнению

$$h(t,\tau)g_1(\tau) + \int_0^t [g_1(\tau)g_1(\theta) + g_2(\tau,\theta)]\rho(\tau,\theta)h(t,\theta)d\theta = g_1(\tau)\rho(t,\tau)$$

(2.40)

- уравнение Фредгольма второго рода. Данное уравнение является аналогом уравнения Винера – Хопфа. Ошибка измерения в этом случае

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{x^2(t)}\left[1 - \int h(t,\tau) g_1(\tau) \rho(t,\tau) d\tau\right]$$

(2.41)

Анализ выражений (2.39) и (2.41) показывает, что задача восстановления сигнала $x(t)$ по дискретной импульсной последовательности может быть представлена как задача фильтрации случайного сигнала в условиях «белого шума» с интенсивностью, пропорциональной параметру $g_1(t)$ и мультипликативной помехи $\nu(t)$. иными словами, справедливо следующее модельное представление: на входе сглаживающего фильтра наблюдается процесс

$$y(t) = x(t)\left[g_1(t) + \nu(t)\right] + n(t)$$

где $\overline{\nu(t)} = 0, \overline{\nu(t_1)\nu(t_2)} = g_2(t_1, t_2)$; $n(t)$ - «белый» шум; $\overline{n(t_1)n(t_2)} = g_1(t_1) g_2(t_2) \delta(t_2 - t_1)$. Оптимальная весовая функция $h(t,\tau)$ или ошибка $\overline{\varepsilon^2(t)}$ при заданных $\rho(t_1, t_2)$ и $g_2(t_1, t_2)$

Рассмотрим следующие частные случаи разработанной модели при стационарных потоке событий $\{t_i\}$ и сигнале $x(t)$.

1 Допустим, что $\rho(\tau) g_2(\tau) = \rho(\tau) g_2(0)$. примером такого потока событий является отрицательно – биноминальный поток. Тогда задача восстановления сигнала $x(t)$, как следует из выражения (2.40), эквивалентная задача извлечения сигнала $x(t)$ из некоррелированных с ним «белого» и «окрашенных» шумов, причем характеристики последнего с точностью до множителя $g_2(0)$ совпадают с характеристикой сигнала $x(t)$. Предполагая, что $g_1 >> \frac{1}{\Delta}$, где Δ – интервал корреляции сигнала $x(t)$, можно показать, что

$$h(\tau) = \left[1 + g_2(0)\right]^{-1} \delta(\tau),\ \tau \geq 0;\ \overline{\varepsilon^2} = \frac{\left|\overline{x^2(t) g_2(0)}\right|}{1 + g_2(0)}$$

Следовательно, оптимальный фильтр есть усилитель.

2 Допустим, что $\rho(\tau) g_2(\tau) \approx \rho(0) g_2(\tau)$. данное модельное представление справедливо, например, для парнокорреляционного потока собы-

тий с $g_2(\tau) = P\delta(\tau)$. в этом случае восстановление сигнала $x(t)$ эквивалент извлечению его из «белого» шума с интенсивностью $g_1 + P$. например, для однополюсного спектра сигнала $x(t)$ функция $h(\tau)$ соответствует RC – фильтру.

3 Допусти, что корреляционная функция $g_2(t_1, t_2) = 0$ или с увеличением интервала $(0, t)$ стремится к нулю. Примером таких потоков событий $\{t_i\}$ являе6тся пуассоновский поток и поток Бернулли с парциальными плотностями $\frac{1}{t}$ и числом событий на интервале $(0, t)$, равном $\lambda_0 t$. в этом случае задача восстановления непрерывного сигнала $x(t)$ вырождается в ранее рассмотренную, так как производящий функционал потока Бернулли при указанных условиях

$$L[u] = \lim_{t \to \infty} \left[1 + \frac{1}{t} \int_0^t u(\tau) d\tau \right]^{\lambda_o t} = \exp\left[\lambda_0 \int_0^\infty u(\tau) d\tau \right]$$

то есть совпадает с производящим функционалом пуассоновского потока событий.

Заметим, что решение задачи оценки текущих значений интенсивности потока импульсов, образованного из пуассоновского путем модуляции ее интенсивности случайной функцией времени, при коррелированных значениях амплитуд импульсов приводит, по существу, к тем же модельным представлениям, определяемым выражением (2.41).

2.5. Модели систем с нелинейными преобразователями случайных сигналов

В качестве сигналов в данном разделе рассматриваются случайные импульсные последовательности. Импульсные последовательности являются базовыми случайными процессами во многих информационных системах, в частности, оптоэлектронных. Характерной особенностью этих систем является малость длительности импульса по отношению к постоянной времени всей системы. Например, длительность отклика фотоприемника на отдельный квант света обычно не превышает единиц наносекунд, а постоянная времени оптоэлектронной системы в ряде случаев составляет миллисекунды и более. В этом случае говорят о δ - импульсной последовательности.

Рассматриваются две последовательности информационных систем:

Системы с аппаратурным «мертвым» временем и системы с автоматической регулировкой усилителя.

2.5.1. Модели с аппаратурным «мертвым» временем

Рассматриваема задача оценки влияния аппаратурного «мертвого» времени непродлевающегося типа на погрешность оценивания средней скорости счета λ рекуррентной импульсной последовательности. Данная задача возникает, например, в оптической физике, ядерно – физическом эксперименте, радиометрическом контроле материалов.

В данной работе решение этой задачи проводится на основе анализа взаимосвязи между выборочным средним m^* временных интервалов между импульсами наблюдаемой последовательности и математическим ожиданием m_1 интервалов между импульсами истинной последовательности. Такой подход к решению рассматриваемой задачи возможен при малых относительных флуктуациях m_1, где m_1 – оценка параметра m_1. В этом случае оценка интенсивности $\dot{\lambda} = \frac{1}{m_1}$, а ее дисперсия $\sigma_\lambda^2 = \sigma_{m_1}^2$.

Известно, что плотность распределения интервалов t^* между импульсами наблюдаемой последовательности

$$\varphi(t^*) = f(t^*) + \int_0^\tau f(t^* - x) g(x, m_1) dx, \qquad t^* \geq \tau$$

(2.24)

$$\varphi(t^*) = 0, \; t^* < \tau$$

где $f(t)$ – плотность распределения между импульсами; функция $g(x,m_1)$ определяется как решение интегрального уравнения

$$g(x,m_1) = f(x) + \int_0^\infty f(x-y)g(y,m_1)dy$$

(2.43)

τ - длительность аппаратурного мертвого времени. Из (2.43) после преобразования следует

$$m_1^* = m_1\left[1 + \int_0^\tau g(x,m_1)dx\right]$$

(2.44)

В этом случае задача оценивания интенсивности импульсной последовательности λ сводится к решению относительно m_1 уравнения

$$m_1^* = m_1\left[1 + \int_0^\tau g(x,m_1)dx\right], \qquad m_1^* = (u)^{-1}\sum_{i=1}^n t_i^*$$

(2.45)

где n – число измеренных временных интервалов между наблюдаемыми импульсами. Точное решение уравнения (2.45) и определения на этой основе λ для большинства практических задач не представляется возможным. Тем не менее в указанных задачах требуется относительная погрешность измерения параметра λ составляет порядка единиц процентов и менее, что позволяет непосредственно из (2.44) и (2.45) оценить величину дисперсии

$$\sigma_{m_1}^2 = \frac{\sigma_{m_1}^{2\,*}}{\left(\dfrac{\partial m_1^*}{\partial m_1}\right)} = \frac{n^{-1}\sigma_{t^*}^2}{(1 + \int_0^\tau g(x,m_1)dx + m_1\int_0^\tau \dfrac{\partial g(x,m_1)dx}{\partial m_1})^2}$$

(2.26)

где $\sigma_{t^*}^2$ - дисперсия наблюдаемого интервала t^* из выражения (2.42).

При условии $\tau = 0$ оценка дисперсии оценки m_1 1, где

$$m_1^* = (u)^{-1}\sum_{i=1}^{n} t_i^*$$

Составит

$$\sigma_0^2 = n_0^{-1}\sigma_t^2$$

(2.48)

Где 1 – дисперсия интервалов между импульсами истинной последовательности. Наличие аппаратурного мертвого времени снижает прежде всего быстродействие измерений прибора λ. Для сохранения быстродействия необходимо соблюдать следующие равенства:

$$n = \frac{n_0}{1 + \int_0^{\tau} g(x, m_1)dx}$$

(2.48)

Тогда квадрат относительного увеличения η погрешности измерения параметра λ за счет аппаратного мертвого времени выразится так

$$\eta^2 = \frac{\left(1 + \int_0^{\tau} g(x, m_1)dx\right)\left[2m_1\int_0^{\tau} xg(x, m_1)dx + (m_1^2 + \sigma_t^2)\left(1 + \int_0^{\tau} g(x, m_1)dx\right) - m_1^{*2}\right]}{\sigma_t^2\left(1 + \int_0^{\tau} g(x, m_1)dx + m_1\int \frac{\partial g(x, m_1)}{\partial m_1}dx\right)^2} \quad (2.49$$

)

Рассмотрим результаты решения нашей задачи для различных типов импульсных последовательностей.

1.Допустим, что $\{t_i\}$ – случайная величина с плотностью вероятностей

$$f(t) = \left(\frac{1}{m_1}\right)e^{-\frac{t}{m_1}}$$

В этом случае $g(x, m_1) = \frac{1}{m_1}$, а

$$m_1 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} t_i^* - \tau; \qquad \eta_1^2 = 1 + \frac{\tau}{m_1}$$

(2.50)

Отметим, что оценка параметра η^2 совпадает с качественной.

2.Пусть $\{t_i\}$ образует поток Эрланга второго порядка:

$$f(t) = \left(\frac{4t}{m_1^2}\right) e^{-\frac{2t}{m_1}}$$

Тогда получим

$$g(x, m_1) = \frac{1}{m_1}\left[1 - e^{-\frac{4x}{m_1}}\right]; \qquad m_1^* = m_1 + \tau - (\frac{m_1}{\tau})\left[1 - e^{-\frac{4\tau}{m_1}}\right]$$

(2.51)

$$\eta_2^2 = \frac{\left[\frac{2}{3} + \frac{2\tau}{m_1} + \frac{1}{2}e^{-\frac{4\tau}{m_1}}\right]\left[\frac{7}{16} + \frac{1}{8}e^{-\frac{4\tau}{m_1}}(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{4\tau}{m_1}})\right]}{(\frac{3}{4} + (\frac{1}{4} - \frac{\tau}{m_1})e^{-\frac{4\tau}{m_1}})^2}$$

(2.52)

При условии $\frac{\tau}{m_1} >> 1$ значение η_2^2 составит $\frac{\tau}{m_1}\frac{14}{9}$, а при $\frac{\tau}{m_1} << 1$

оно выразится через $\eta_2^2 = 1 + 4(\frac{\tau}{m_1})^2$.

3.предположим, что закон распределения интервалов равномерный на промежутке времени $(0, 2m_1)$. При $0 \le x \le 2m_1$ следует, что

$$g(x, m_1) = \frac{1}{2m_1} e^{\frac{x}{2m_1}}; \qquad m_1^* = m_1^* e^{\frac{\tau}{2m_1}}$$

(2.53)

Рассматриваемое увеличение погрешности измерения

$$\eta_3^2 = \frac{\left[\frac{6\tau}{m_1} + 3e^{-\frac{\tau}{2m_1}} + 12e^{-\frac{4\tau}{m_1}} - 8\right]}{(1 - \frac{\tau}{2m_1})^2} \qquad \text{при} \qquad 0 \le \tau \le 2m_1$$

(2.54)

$\eta_3^2 = 1 - \frac{1}{2}\frac{\tau}{m_1}$ при $\frac{\tau}{m_1} << 1$.

Следует обратить внимание на тот факт, что в рассматриваем случае аппаратурное мертвое время не увеличивается, а уменьшает погрешность измерения параметра λ. Это обусловлено неоптимальностью оп минимуму средне-квадратической погрешности метода моментов на уровне выборочного среднего, так кА лучшей оценкой в указанном смысле – оценкой среднего значения равномерно распределенной случайной величины – является среднее между максимальным и минимальным наблюдаемым значениями.

4.пусть истинная последовательность импульсов – поток Эрланга k -ого порядка со средним интервалом m_1. Тогда при $\frac{\tau}{m_1} << 1$

$$g(x, m_1) = \frac{(k^k x^k - 1)}{m_1^k (k-1)!}$$

(2.55)

$$\eta_4^2 = 1 + \frac{k^k}{(k-1)!}\left(\frac{\tau}{m_1}\right)^k.$$

Анализ полученных результатов и их графическая иллюстрация показывают, что степень влияния мертвого времени на точность оценивания интенсивности λ в значительной мере определяется законом распределения интервалов между импульсами.

Рассмотрим частный пример. В газоразрядных счетчиках типа $СБЬ-19$, используемых для измерения потока ионизирующего излучения, аппаратурное мертвое время составляет $3 \cdot 10^{-5} c$. Требуется оценить во сколько раз необходимо увеличить время измерения оценки λ по сравнению с идеальным детектором при $\lambda \approx 10^5 c^{-1}$ и постоянстве погрешности оценивания. В этом случае из (2.50) следует, что время измерения должно быть увеличено в 4 раза.

2.5.2. Модели систем с автоматической регулировкой усиления

Оценка параметров сигнала, прошедшего безынерционный усилитель с автоматической регулировкой усиления (АРУ), является одной из распространенных задач теории и практики радиотехнических цепей и сигналов.

Данная задача возникает, например, при анализе специального детектора ионизирующего излучения, охваченного обратной связью по коэффициенту усиления фотоэлектронного умножителя, или пеленгационных частотных дискриминаторов. Известные подходы решения этой задачи базируются в основном на аппроксимации усилителя с АРУ линейным фильтром с постоянными во времени параметрами при условии малых изменений входного сигнала $x(t)$ относительно среднего значения. Использование этих подходов при анализе последовательности кратковременных импульсов, прошедший усилитель с АРУ, приводить в ряде случаев к значительным погрешностям расчета из – за невыполнения вышеуказанного условия. Целью данной работы является оценка параметров последовательности кратковременных импульсов, прошедший усилитель с АРУ, при линейной регулировочной характеристике, фильтре первого порядка в цепи обратной связи и учете нелинейных свойств рассматриваемого усилителя. Блок – схема такого простейшего усилителя с АРУ и вводимые обозначения представлены на рис.1. Отметим, что в данном случае кратковременным является импульс, длительность которого во много раз меньше постоянной времени цепи обратной связи. Например, радиометрических системах контроля длительность электрических импульсов составляет микросекунды и менее, а постоянная времени цепи обратной связи – секунды и десятки секунд.

Учет нелинейных свойств рассматриваемого простейшего усилителя с АРУ может быть проверен на основе точного решения интегрального уравнения

$$y(t) = x(t)\left[K_0 - \lambda \int h(t-\tau) y(\tau) d\tau \right], h(\tau) = e^{-\gamma\tau} 1(\tau)$$

(2.56)

Определяющего связь между входным $x(t)$ и выходным $y(t)$ сигналами.

Решение интегрального уравнения (2.43) при начальном условии $y(0) = K_0 x(0)$ известными методами приводит с следующей зависимости сигнала $y(t)$ от значений параметров K_0, λ, γ усилителя с АРУ и выходного сигнала $x(t)$:

$$y(t) = K_0 x(t)\left[1 - \lambda \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) e^{-\lambda \int_0^t x(\theta) d\theta} d\tau \right]$$

(2.57)

Из выражения (2.56) находим отклик рассматриваемого усилителя с АРУ на одиночный кратковременный импульс $x_0(t)$:

$$y(t) = K_0 x_0(t)\left[1 - h(t)(1 - e^{-\lambda \int_0^e x_0(\theta) в\theta}) \right].$$

(2.58)

Непосредственное интегрирование выражения (2.58) приводит к соотношению между площадями входного и выходного импульсов:

$$S_{вых} = \frac{K_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda S_{d[}})$$

(2.59)

Анализ этого выражения показывает, что только площадь кратковременного импульса определяет площадь импульса рассматриваемого на выходе нелинейного радиотехнического звена. При $\lambda S_{вых} << 1$ площадь $S_{вых} \approx K_0 S_{вх}$, что соответствует линейному приближению рассматриваемого усилителя. Если $S_{вх}$ - случайная величина с характеристической функцией $\theta(j\omega)$ находим

$$S_{вых} = \frac{K_0}{\lambda}\left[1-\theta(-\lambda)\right] \; \sigma^2\left[S_{вых}\right] = \frac{{K_0}^2}{\lambda^2}\left[\theta(-2\lambda) - \theta^2(-\lambda)\right]$$

(2.60)

Из выражений (2.57) и (2.59) следует также, что при вычисление интегральных параметров сигнала $y(t)$ последовательность кратковременных импульсов $x(t)$ может быть представлена как δ - импульсная. Тогда из выражения (2.57) с учетом вытекающего из определения δ - функции равенства

$$\int_0^t \delta(\tau - t_0) f_0(\tau) e^{\int_0^t \delta(\theta - t_0)d\theta} d\tau = \frac{1}{a}(e^a - 1) f_0(t_0); t_0 \in (0,t)$$

(2.61)

где $f_0(t)$ - функция, не имеющая разрывов в окрестности точки t_0, находим площадь N-ого выходного импульса

$$S_{вых}(N) = \frac{K_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda S_{d[}(N)})\left[1 - \sum_{i=1}^{N-1} e^{-\lambda S_{d[}(i)} h(t - t_i) e^{-\lambda \sum\limits_{j=i+1}^{N} S_{вх}(i)}\right]$$

(2.62)

Сомножитель $\dfrac{(1 - e^{-\lambda S_{d[}(N)})}{\lambda}$ характеризует изменение площади выходного импульса под действием «самого на себя», а остальные сомножители – значение коэффициента усиления $K(t)$ к моменту появления N-ого импульса. Из выражения (2.62) следует так же, что площадь импульса на выходе усилителя с АРУ зависит от суммарной площади ранее поступивших импульсов, а при $S_{вх}(i) = const$ от номера импульса.

Для определения параметров процесса $y(t)$ при поступлении на вход усилителя с АРУ произвольной импульсной последовательности решение интегрального уравнения (2.56) представив в следующем виде:

$$y(t) = e^{-\gamma t}\frac{d}{dt} f(t),$$

(2.63)

где

$$f(t)=\frac{K}{\lambda}\int_0^t e^{\gamma\tau}\left[\frac{d}{dt}e^{-\lambda\int_\tau^t x(\theta)d\theta}\right]$$

(2.64)

Тогда смешанные моменты распределения процесса

$$\overline{y(t_1)y(t_2)...y(t_n)}=\frac{K_0^n}{\lambda^n}e^{-\gamma t_1-\gamma t_2...-\gamma t_n}\frac{\partial^n}{\partial t_1\partial t_2...\partial t_n}\times$$
$$\times\int_0^{t_1}...\int_0^{t_n}e^{\gamma t_1+\gamma t_2..+\gamma t_n}\frac{\partial^n}{\partial\tau_1\partial\tau_2...\partial\tau_n}\left\langle e^{-\lambda\sum_{i=1}^n\int_{\tau_i}^{t_i}x(\theta)d\theta}\right\rangle X(\Theta)d\tau_1 d\tau_2...d\tau_n$$

(2.65)

где $\langle\cdot\rangle_{X(\theta)}$ - символ усреднения по всевозможным значениям $X(\theta)$. Выражение под знаком усреднения $\langle\cdot\rangle_{X(\theta)}$ представляет собой значение $2n$-мерной характеристической функции процесса $N(t)=X(\theta)d\theta$, тогда

$$\varphi(j\omega_1,j\omega_2..j\omega_n,\tau_n,t_1,t_n...t_n)=\overline{\exp(j\omega_1 N(t_1)+j\omega_2 N(\tau_1)+..j\omega_{2n-1}N(t_n)+j\omega_{2n}N(\tau_n)}$$

при $j\omega_{2m-1}=j\omega_{2m}=-\lambda$; $\tau_m\le t_m$; $m=1,2..,n$.

В этом случае получим

$$\overline{y(t_1)y(t_2)...y(t_n)}=K_0^n\exp[-\gamma t_1-\gamma t_2...-\gamma t_n]\times\left[\frac{\partial^n}{\partial\tau_1\partial\tau_2...\partial\tau_n}\right]\frac{\partial^n}{\partial t_1\partial t_2...\partial t_n}\times$$
$$\times\int_0^{t_1}...\int_0^{t_n}e^{\gamma t_1+\gamma t_2..+\gamma t_n}\left[\frac{\partial^n}{\partial\tau_1\partial\tau_2...\partial\tau_n}\right]\times$$
$$\times L[(\theta(-\lambda 1(t_1-\upsilon)+\lambda 1(\tau_1-\upsilon)-...-\lambda 1(t_n-\upsilon)+\lambda 1(\tau_n-\upsilon))-1]d\tau_1...d\tau_n$$

(2.67)

где $L[u]$ - производящий функционал потока входных импульсов на интервале (τ,t).

В частном случае среднее по множеству реализаций процесса $y(t)$ есть

$$\overline{y(t)} = \frac{K_0 e^{-\gamma t}}{\lambda} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{\gamma\tau} \frac{\partial}{\partial\tau} L[\theta(-\lambda) - 1] d\tau$$

(2.68)

В установившемся режиме и стационарном процессе $x(t)$ среднее по времени выходного процесса

$$\overline{y(t)} = \frac{\gamma}{\lambda}\left[K_0 - \overline{K(t)}\right]$$

(2.69)

где непосредственно из (2.57)

$$K(t) = K_0 \gamma \int h(t-\tau) e^{\int_\tau^t x(\theta) d\theta} d\tau$$

(2.70)

Тогда из выражения (2.69 – 2.70)

$$\overline{y(t)} = \frac{K_0 \gamma}{\lambda} \left\{ 1 - \gamma \int_0^t h(t-\tau) L[\theta(-\lambda) - 1] d\tau \right\}$$

(2.71)

Аналогично среднему вычисляются моменты распределения процесса $y(t)$ более высокого порядка. Например, для стационарного потока импульсов $x(t)$ в установившемся режиме определяем корреляционную функцию процесса $y(t)$

$$B(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}\left[\gamma^2 R(\tau) - R''(\tau)\right]$$

$R(\tau)$ - корреляционная функция процесса $K(t)$, определяемого выражением (2.70). с учетом выражений (2.67) и (2.70)

$$R(\tau) = K_0^2 \gamma^2 \int\int h(t-u) h(t-\varphi) L(\theta(-\lambda 1(t-\upsilon) + \lambda 1(u-\upsilon) - \lambda 1(t+\tau-\upsilon) + \\ + \lambda 1(\varphi - \upsilon)) - 1) d\varphi du - \overline{y(t)^2}$$

(2.73)

Приведем результаты определения параметров последовательностей различного типа, прошедших усилитель с АРУ.

Предположим, что поток импульсов на входе рассматриваемого усилителя ест поток Бернулли с числом точек $k << 1$ на интервале $(0,t)$ и парциальной плотностью $g(t')$, производящий функционал которого

$$L(u) = 1 + \int_{\tau}^{t} \{\theta[1 + u(\varphi), \varphi] - 1\} g(\varphi) d\varphi$$

Из выражения (2.68) находим среднее по множеству реализаций процесса $y(t)$

$$\overline{y(t)} = \frac{K_0}{\lambda}(1 - \theta(-\lambda)) g(t'), t' \in (0,t),$$

А непосредственно из выражения (2.67) получим корреляционную функцию

$$B(t_1,t_2) = \begin{cases} \dfrac{K_0^{\,2}}{\lambda^2}[1 - 2\theta(-\lambda) + \theta(-2\lambda)][g(t_1)\delta(t_2 - t_1) - g(t_2)g(t_1)] \\ \dfrac{K_0^{\,2}}{\lambda^2}[1 - 2\theta(-\lambda) + \theta(-2\lambda)][g(t_1)\delta(t_1 - t_2) - g(t_2)g(t_1)]; t_1 \ge t_2 \end{cases},$$

Допусти, что $x(t)$ - последовательность равноотстоящих импульсов с частотой поступления f_0 и парциальными плотностями $g(t') = \delta\left[t - \frac{i-1}{f_0}\right]$. В этом случае производящий функционал

$$L[u] = \prod_{i=1}^{n} (1 + u(\frac{i-1}{f_0})),$$

А среднее значение площадей импульсов

$$S_{вых}(N)=\frac{K_0}{\lambda}[1-\theta(-\lambda)]\left(1-\frac{1-\theta(-\lambda)}{e^{\frac{\gamma}{f_0}}-\theta(-\lambda)}(1-e^{-\frac{\gamma(N-1)}{f_0(N-1)}}(-\lambda))\right)$$

(2.74)

Отсюда следует, что установившийся режим функционирования усилителя с АРУ достигается при условии

$$\theta(-\lambda)y^{-\frac{\gamma}{f_0}}\langle 1;S_0\rangle-\frac{\gamma}{\lambda f_0},S_{вых}=const$$

(2.75)

Которое является, по существу, условию устойчивости по среднему значению выходного сигнала рассматриваемого усилителя. В установившемся режиме

$$\overline{S_{вых}}=\frac{K_0}{\lambda}[1-\theta(-\lambda)]\frac{1-e^{-\frac{\gamma}{f_0}}}{1-\theta(-\lambda)e^{-\frac{\gamma}{f_0}}}$$

(2.76)

А квадраты относительных флуктуаций площади выходных импульсов и коэффициента усиления $K(t)$ в моменты появления импульса равны

$$\delta^2(S_{вых1})=\frac{\theta(-2\lambda)-\theta^2(-\lambda)}{1[-\theta(-\lambda)]^2}\left[1+\frac{1-2\theta(2\lambda)+\theta(-2\lambda)}{\exp(\frac{2\gamma}{f_0})-\theta(-2\lambda)}\right]$$

(2.77)

$$\delta_k^2=\frac{\theta(-2\lambda)-\theta^2(-\lambda)}{\exp(\frac{2\gamma}{f_0})-\theta(-2\lambda)}$$

, $\lambda\overline{S}<<1$

Выражение (2.77) получено в предложении

$$\theta(-2\lambda)e^{-\frac{2\gamma}{f_0}}<1$$

Являющемся условием устойчивости в среднеквадратическом смысле усилителя с АРУ. Более того, следует, что для устойчивости рассматриваемого усилителя по n -ому моменту вероятностного распределения величины $S_{вых}$ необходимо совместное выполнение условий

$$\theta(-m\lambda)e^{-\frac{m\gamma}{f_0}} < 1, \qquad m = 1,2,..,n. \qquad (2.78)$$

Отметим, что при фиксированных значениях площади выходных импульсов из выражения (2.76)

$$\overline{S_{вых1}} = \frac{K_0}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda S_0}\right]\frac{1 - e^{-\frac{\lambda}{f_0}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{f_0} - \lambda S_0}} \qquad (2.79)$$

Которое в рассматриваемом случае соответствует известному выражению.

Пусть последовательность выходных импульсов является пуассоновской с интенсивностью ρ и производящим функционалом

$$L(u) = \exp(\rho\int_{\tau}^{t}\{\theta[1 + u(\varphi),\varphi] - \varphi\}d\varphi)$$

Тогда при условии

$$\theta(-\lambda) - \frac{\gamma}{\rho} < 1 \qquad (2.80)$$

Среднее процесса $y(t)$ и площади импульсов на выходе усилителя есть

$$\overline{y(t)} = \frac{K_0}{\lambda}\frac{\gamma\rho C_1}{\gamma + \rho C_1} \qquad \overline{S_{вых2}} = \frac{K_0}{\lambda}\frac{\gamma\rho C_1}{\gamma + \rho C_1} \qquad \overline{K(t)} = \frac{\gamma K_0}{\gamma + \rho C_1} \qquad (2.81)$$

где $C_1 = 1 - \theta(-\lambda)$. Условие является условием устойчивости усилителя с АРУ по среднему значению выходного процесса. При детерминированных амплитудах данное условие

$$S_0 > -\frac{1}{\lambda}\ln(1+\frac{\gamma}{\rho})$$

(2.82)

Если $\frac{\gamma}{\rho} << 1$, условие (2.82) тождественно соответствующему условию (2.75) при $\rho = f_0$. В общем случае допустимые значения S_0 больше соответствующих значений, определяемых условием (2.75), так как флуктуация числа импульсов, поступающих на вход импульса с АРУ, снижают его устойчивость.

Корреляционная функция $R(\tau)$ процесса $K(t)$ есть

$$R(\tau) = K_0^2\left[\frac{2\gamma^2}{(\gamma+\rho C_1)(2\gamma+\rho C_1)} - \frac{\gamma^2}{(\gamma+\rho C_1)^2}\right]e^{-(\gamma+\rho C_1)|\tau|}$$

(2.83)

где $C_2 = 1-\theta(-2\lambda)$. Квадрат относительных флуктуаций коэффициента усиления

$$\delta_k^2 = \frac{2C_1 - C_2}{\dfrac{2\gamma}{\rho + 1 - \theta(-2\lambda)}}$$

(2.84)

При экспоненциальном распределении значений площади импульсов $(\theta(-\lambda) = (1+S_0\lambda)^{-1})$

$$\overline{y(t)} = \frac{K_0\bar{S}_0\rho}{1+\bar{S}_0\lambda+\dfrac{\bar{S}_0\lambda\rho}{\gamma}}$$

(2.85)

$$\delta_k^2 = \frac{\bar{S}_0\lambda}{(1+\bar{S}_0\lambda)\left[\dfrac{\gamma}{\rho}+\bar{S}_0\lambda(1+2\dfrac{\gamma}{\rho})\right]}$$

а при $\lambda\bar{S}_0 << 1$

$$\delta_k^2 \approx \frac{\bar{S}_0^{\ 2}\lambda^2}{\left[\frac{\gamma}{\rho} + \bar{S}_0\lambda(1+2\frac{\gamma}{\rho})\right]}$$

$$\overline{y(t)} \approx \frac{\bar{S}_0\rho \cdot \gamma \cdot k_0}{\lambda\bar{S}_0\rho + \gamma}$$

(2.86)

В случае сильного влияния цепи обратной связи на параметры процесса $y(t)$ и $K(t)$

, $\delta_k^2 = \frac{\rho}{2\gamma + \rho}$

(2.87)

Если предположить, что $\frac{\gamma}{\rho} << 1$, то соответственно получим

$$\overline{y(t)} = \frac{K_0\bar{S}_0\gamma}{\bar{S}_0\lambda + \frac{\rho}{\gamma}}, \qquad \delta_k^2 = \frac{\bar{S}_0^{\ 2}\lambda^2}{\left[\bar{S}_0\lambda + \frac{\gamma}{\rho})\right]}$$

(2.88)

$$\overline{y(t)} = \frac{K_0\gamma}{\lambda}, \qquad \delta_k^2 \approx 1$$

(2.89)

В случае «редкой» импульсной последовательности ($\frac{\gamma}{\rho} >> 1$)

$$\overline{y(t)} \approx K_0\bar{S}_0\rho, \qquad \delta_k^2 = \frac{\bar{S}_0^{\ 2}\lambda^2\rho}{\gamma}$$

(2.90)

$\delta_k^2 = \dfrac{\rho}{2\gamma}$, $\overline{y(t)} = \dfrac{K_0\rho}{\lambda}$

(2.91)

При детерминированных площадях импульсов и $\dfrac{\gamma}{\rho} << 1$

$$\delta_k^2 = \frac{1 - e^{-\lambda S_0}}{1 + e^{-\lambda S_0}}$$

(2.92)

Из выражений (2.84) и (2.92) следует, что при постоянных значениях площади импульсов и произвольных значениях параметров $\lambda \overline{S}_0$, $\dfrac{\gamma}{\rho}$ относительные флуктуации $\delta_k^2 \le 1$. Непосредственно

$$R(\tau) = \frac{2K_0^2\gamma^2\rho(C_1 - C_2)}{\lambda^2(\gamma + \rho C_1)(2\gamma + \rho C_1)}\left[\delta(\tau) - \frac{\rho(2C_1\gamma + \rho C_1^{\ 2})}{2(\gamma + \rho C_1)} e^{-(\gamma + \rho C_1)|\tau|}\right]$$

(2.93)

Получено при условии

$$\theta(-2\lambda) - 2\frac{\gamma}{\rho} < 1$$

(2.94)

Являющемся условием устойчивости в среднеквадратическом смысле рассматриваемого усилителя с АРУ. Условие устойчивости по m-ому моменту распределения процесса $y(t)$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$\theta(-m\lambda) - m\frac{\gamma}{\rho} < 1$$

(2.95)

Допусти, что площади выходных импульсов независимы и с вероятностью p принимают значения S_0, а с вероятностью $p-1$ – нулевые значения, тогда

$$\overline{y(t)} = \frac{K_0}{\lambda}\frac{p\gamma\rho C_1^*}{\gamma + p\rho C_1^*}, C_1^* = 1 - e^{-\lambda S_0}$$

$$\delta_k^2 = \frac{C_1^2}{\frac{2\gamma}{p\rho} + C_2^*}, C_2^* = 1 - e^{-2\lambda S_0}$$

Что соответствует пуассоновскому потоку импульсов с фиксированной площадью ($S_0 = S$)

и интенсивностью $p\rho$

допустим, что входной поток импульсов – парнокоррелированный с производящим функционалом

$$L(u) = \exp(\rho_0 \int u(x)dx + \frac{1}{2}\int_\tau^t\int_\tau^t g(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)ddx_1 x_2)$$

Площади импульсов фиксированы, а второй корреляционный момент потока импульсов $g(x_1, x_2) = P\delta(x_1 - x_2)$. В этом случае входной поток импульсов может бать представлен как пуассоновский с интенсивностью $\rho = \rho_0 - \frac{P}{2}$ и

$$\theta(j\omega) = (1 - \frac{P}{2\rho_0 - P})e^{j\omega S_0} + \frac{P}{2\rho_0 - P}e^{2j\omega S_0}$$

Данное тождество справедливо при $\rho_0 \geq P$ и обусловлено возможностью представления парнокорреляционного потока импульсов в виде суперпозиции пуассоновских потоков одиночных и двукратных импульсов.

Например,

$$\overline{y(t)} = \frac{K_0}{\lambda}\frac{\rho_0 C_1^* - \frac{1}{2}C_2^* P}{\gamma + \rho_0 C_1^* - \frac{1}{2}C_1^* P}$$

а условие устойчивости по среднему значению выходного сигнала

$$S_0 \geq \frac{1}{\lambda}\ln\left[1 - \frac{\rho}{P}(\sqrt{1 + \frac{2\gamma P}{\rho_0^2}} - 1)\right]$$

При $\rho_0 = P$

$$\overline{y(t)} = \frac{K_0}{2\lambda}\rho \frac{C_2^{\ *}}{\gamma + \frac{\rho_0}{2} C_2^{\ *}}, \ S_0 \geq \frac{1}{2\lambda} \ln\left[1 + \frac{2\gamma}{\rho_0}\right]$$

Оценим нелинейные свойства рассматриваемого усилителя на основе вышеприведенных результатов. На рис.2.4 представлены зависимости

$$\chi_1 = \frac{\bar{S}_{вых 2}}{\bar{S}_{вых 2}}$$

От параметров λS_0, $\frac{\gamma}{\rho}$ при $\rho = f_0$ и детерминированных площадях входных импульсов. При $\lambda S_0 << 1$ или $\frac{\gamma}{\rho} >> 1$ параметр $\chi_1 \approx 1$, так влияние обратной связи на значение коэффициента усиления незначительно. Также $\chi_1 \approx 1$ или $\frac{\gamma}{\rho} << 1$ из-за малых значений коэффициента усиления . Минимум значений χ_1 достигается при $\lambda S_0 >> 1$ и $\frac{\gamma}{\rho} = 1.793$ и равно $\chi_{1мин} = 0.770$.

На рис.2.5 представлены зависимости

$$\chi_1 = \frac{\overline{y_0(t)}}{\overline{y_1(t)}}$$

где $\overline{y_0(t)}$ и $\overline{y_1(t)}$ – средние значения пуассоновской последовательности импульсов при $\rho = \rho_0, \bar{S} = S_0, \rho = \frac{\rho_0}{m}, \bar{S} = S_0 m$ соответственно при $\frac{\gamma}{\rho} >> 1$. Сплошными линиями изображены зависимости χ_2 от параметра m для детерминированных площадей импульсов, пунктирными – для флуктуирующих по экспоненциальному закону площадей импульсов со средним S_0. Анализ этих зависимостей показывает, что в области малых значений λS_0 и $m < 1$ величина $\chi_2 \approx 1$ из-за слабого влияния сигнала $u_p(t)$ на значения коэффициента усиления $K(t)$. В области $m << 1$ значение величины χ_2 не зависит от m и определяются лишь значениями параметра λS_0. При $m >> 1$ зависимость χ_2 от параметра m приближается к линейной.

При учете равенства средних значений входных сигналов из приведенных результатов можно отметить, что аппроксимация простейшего усилителя с АРУ линейными инерционным фильтром может привести к сколь угодно большой погрешности оценки параметров импульсов последовательности, прошедшей данный усилитель.

Отметим, что при $\lambda S_0 << 1$, как следует из выражения (), рассматриваемый усилитель с АРУ может быть аппроксимирован нелинейным фильтром второго порядка:

$$y(t) = K_0 x(t)\left[1 - \lambda \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)e^{-x_{cp}(t-\tau)}d\tau\right]$$

где x_{cp} – среднее по времени входного процесса. Данная аппроксимация означает замену с автоматической регулировкой коэффициента усиления «назад» усилителем с АРУ « вперед» с условие полосы пропускания фильтра на величину λx_{cp}. Например, для пуассоновской последовательности импульсов с фиксированной амплитудой с учетом $x_{cp} = \rho S_0, \overline{x(t)x(\tau)} = \rho_0 S_0^2 \delta(t-\tau) + \rho^2 S_0^2$ получим $\overline{y(t)} = \dfrac{K_0 \rho S_0 \gamma}{(\gamma + \rho S_0 \gamma)}$, что соответствует выражению ()

в указанном приближении.

Таким образом, результаты проделанной работы показывают, что нелинейные свойства усилителя с АРУ в наибольшей степени проявляются при поступлении на его вход последовательности кратковременных импульсов. Как следует из выражения (), порядок нелинейности исследованного усилителя с АРУ является сколь угодно большим, так как для оценки любого n-го момента вероятностного распределения процесса $y(t)$ недостаточно значения конечного числа начальных моментов процесса $x(t)$. При вычислении моментов $\overline{y(t)\ldots y(t_m)}$ в явном виде возможно лишь одиночного импульса, периодической и пуассоновской последовательности импульсов, а так же последовательностей, образованных из них путем вариаций значений площади импульсов. В остальных случаях необходимо использовать численные методы вычисления многомерных интервалов. Условие сходимости данных интегралов и определяют, по существу, условие устойчивости усилителей с АРУ.

3. Информационные характеристики систем передачи и отображения информации

Для анализа и проектирования систем передачи и отображения информации необходимо, в первую очередь ввести количественную меру самой информации, содержащуюся в сообщении и переносимую сигналом. Следующим этапом является выбор формы представления данной информации с целью повышения скорости передачи информации или помехоустойчивости. Эти задачи и решает теория информации и кодирования, введение в которую является данный раздел.

3.1. Основные понятия теории информации

Информация как совокупность сведений о состоянии системы, содержащаяся в элементарном сообщении, есть число. Данное число отражает своего рода полезность принятого сообщения. При этом желательно не учитывать смыслового содержания и субъективной целостности принятого сообщения.

Наиболее универсальной мерой количества информации является мера, предложенная К.Шенноном в 1946г. Данная мера является статической, то есть, количество информации I является функцией вероятности появления данного сообщения $p(a_i)$: $I = f\left[p(a_i)\right]$. Иными словами, каждому сообщению a_i соответствует свое количество информации называемое собственной. При этом совокупность $a_i, i = 1,2...,K$, образует так называемый алфавит источника сообщений, а K – объем алфавита. Элементарные сообщения a_i образуют полную группу событий, то есть, $\sum_{i=1}^{K} p(a_i) = 1$. Вид функции $I = f\left[p(a_i)\right]$ определяется исходя из следующих предложений. Количество информации, во-первых, должно быть равно нулю для достоверного события:

$$f[1] = 0 \qquad (3.1)$$

Во-вторых, количество информации, содержащейся в двух последовательных независимых сообщениях a_i и a_j должно быть равно сумме количества информации содержащейся в сообщении a_i и количество информации содержащейся в сообщении a_j, то есть,

$$f\left[p(a_j)p(a_i)\right] = f\left[p(a_j)\right] + f\left[p(a_i)\right] \quad (3.2)$$

Обозначив $\left[p(a_j)\right] = x$, а $\left[p(a_i)\right] = y$, выражение (3.2) формирует задачу определения вида функции $f(x)$:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (3.3)$$

при ограничении $f(1) = 0$.

Данная задача является вариационной, решение которой может быть осуществлено следующим образом. Продифференцируем левую и правую часть выражения (3.3) по x:

$$yf'(xy) = f'(x) \quad (3.4)$$

Полагая, что $x \neq 0$, умножим левую часть и правую на x:

$$xyf'(xy) = xf'(x) \quad (3.5)$$

Поскольку y произвольное число на интервале $(0,1)$, то из выражения (3.5) следует, что

$$xf'(x) = \kappa \quad (3.6)$$

где κ – постоянная величина не зависящая от x. Решение дифференциального уравнения (3.6) при условии $f(1) = 0$

$$f(x) = \kappa \ln x \quad (3.7)$$

То есть

$$I = \kappa \ln\left[p(a_j)\right] \quad (3.8)$$

Постоянная κ определяет масштаб измерения собственной информации. Поскольку $\ln x < 0$ при $0 < x < 1$, то удобно принимать κ отрицательной величиной. При $\kappa = -1$

$$I = -\ln\left[p(a_j)\right]$$

А единица информации называете нат. Один нат – это такое количество информации, которое содержится в сообщении о том, что поступило событие, имеющее вероятность $\frac{1}{e}$.

При $\kappa = -\frac{1}{\ln 10}$

$I = -\lg\left[p(a_j)\right]$

А единица информации называется дит. Однако чаще получают $\kappa = -\frac{1}{\ln 2}$. в этом случае

$I = -\log_2\left[p(a_j)\right]$

А единица количества информации называется двоичной. Одна двоичная единица информации содержится в сообщении о том, что наступило одно из двух равновероятностных событий. Двоичную единицу информации называют «бит» от сокращения английских слов binery digit. Преимущественное использование двоичной единицы информации объясняется, прежде всего, широки распространением двоичных кодов в вычислительной технике и техники связи.

Следует отметить

1 нат = 1,443 бит

1 дит = 3,32 бит

Вводят понятие условие собственная информация и взаимная информация.

В общем случае сообщения A и сигнал B на входе и выходе канала связи соответственно зависимы. Пусть $p\left(\frac{a_i}{b_j}\right)$ – условная вероятность того, что реализовалось состояние a_i алфавита A при условии, что сигнал B принял состояние b_j. тогда информация, содержащаяся в символе сообщения a_i при условии что сигнал принял значение b_j, определяется как

$$I\left(\frac{a_i}{b_j}\right) = -\log_2 p\left(\frac{a_i}{b_j}\right) \tag{3.9}$$

И называется условной собственной информацией. В формуле (3.9) и в дальнейшем предполагается логарифм по основанию два.

В результате приема символа b_j сигнала B апостериорная вероятность появления символа a_i изменяется по сравнению с априорной. Тогда количество информации относительно символа сообщения a_i доставляемое символом b_j можно определить как

$$I(\frac{a_i}{b_j}) = -\log p(a_i) + \log p(\frac{a_i}{b_j})$$

(3.10)

И назвать взаимной информацией. Взаимная информация может быть отрицательной, положительной и равной нулю в зависимости от соотношения между априорной и апостериорной вероятностями. Более того, взаимная информация не превышает собственную. Отметим, что взаимная информация обладает свойством симметрии и аддитивности и достигает своего максимума, когда принятый символ b_j однозначно определяется переданным a_i, то есть при

$$p\left(\frac{a_i}{b_j}\right) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

Собственная информация определяется выражением (3.8), есть функция случайного события. То есть собственная информация является случайной величиной. Математическое ожидание собственной информации называется энтропией H источника сообщений:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{K} p(a_i) \log p(a_i)$$

(3.11)

Отметим, что согласно (3.8) количество собственной информации для элементарного события, вероятность которого равна нулю, не определено. Тем не менее, энтропия любого источника сообщений конечно, так как

$$\lim_{x \to 0} x \log x = 0$$

согласно правилу Лопиталя.

По сути дела, энтропия есть среднее количество информации, приходящееся на одно элементарное сообщение (букву алфавита). Понятие энтропии является основополагающим в теории информации, которое может быть получено от источника, оказывается тем больше, чем большей энтропией обладает источник. Количество информации трактуется как мера неопределенности, связанная с ожидаемым сообщением. В общем случае с увеличением числа возможных состояний и уменьшением вероятности реализации отдельного состояния энтропия источника возрастает. Чем выше энтропия источника, тем сложнее передать сообщение от этого источника по каналу связи.

Энтропии любого источника, как следует из (3.11), неотрицательна. Равенство нулю имеет место в том только том случае, когда в ансамбле существует сообщение, вероятность появления которого равна единице.

Энтропия обладает свойством аддитивности. Данное свойство следует из аддитивности собственной информации.

Определим при каких соотношениях $p(a_i)$ для алфавита заданного объема K энтропия максимальна. Иными словами оценим максимум выражения

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{K} p_i \log p_i$$

(3.12)

где $p_i = p(a_i)$ для краткости записи, по независимым переменным p_i. Существенной особенностью данной задачей является ограничение

$$\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$$

(3.13)

Данный тип задачи является задачей линейного программирования. Ограничение вида (3.13) в виде уравнения позволяет упростить данную задачу, выразив одну из переменных через другие:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{K-1} p_i \log p_i - (1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i) \log(1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i)$$

(3.14)

Отыскание максимума выражения (3.14) сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} 2p_1 + p_2 + ... + p_n = 1 \\ p_1 + 2p_2 + ... + p_n = 1 \\ .... \\ p_1 + p_2 + ... + 2p_n = 1 \end{cases}$$

(3.15)

где $n = K - 1$. основной определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 2 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & 2 & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 2 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & 2 & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . & 2 \end{vmatrix}$$

(3.16)

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 2 & 1 & i & . & 1 \\ 1 & 2 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & 2 & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(3.17)

Определители Δ_1 и Δ_i равны. Их равенство можно доказать следующим образом. В определителе (3.17) поменять местами первый и i -тый столбец, а затем первую и i -ую строки. В результате данных перестановок получим определитель (3.16). так как перестановка строк или столбцов определителя меняет лишь его знак, то значение определителей Δ_1 и Δ_i равны. Это означает, что максимум энтропии достигается при

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_{k-1}$$

Если в выражении (3.12) любую независимую переменную p_i выразить через другие и заново построить систему (3.15), то определитель Δ, Δ_1 и Δ_i не изменяется. Это означает, что

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_K$$

а с учетом условия (3.13)

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_K = \frac{1}{K}.$$

Тогда $H(A) = \log K$

или

$$H(A) \leq \log K$$

(3.18)

Неравновероятный выбор символов уменьшает энтропию источника относительно $H(A)_{\max}$. с другой стороны учет вероятностных связей символов, последовательно выбираемых источником, ведет к дальнейшему уменьшению энтропии (информативности) источника.

Условная энтропия $H(\frac{A}{B})$ учитывает вероятностные связи и определяется как

$$H(\frac{A}{b_j}) = \sum_A p(\frac{a_i}{b_j}) \log p(\frac{a_i}{b_j})$$

(3.19)

Среднее значение $H(\frac{A}{b_j})$

$$\overline{H(\frac{A}{b_j})} = H(\frac{A}{B}) = -\sum_A \sum_B p(\frac{a_i}{b_j}) \log p(\frac{a_i}{b_j})$$

(3.20)

Называют условной энтропией ансамбля A относительно ансамбля B.

Математическое ожидание собственной информации $I(a_i, b_j) = -\log p(a_i, b_j)$ представляет собой совместную энтропию ансамбля $A \cdot B$

$$H(A, B) = \sum_{AB} p(a_i, b_j) I(a_i, b_j)$$

(3.21)

из определения условной вероятности

$$p(a_i, b_j) = p(a_i) p(\frac{b_j}{a_i})$$

следует, что

$$H(A, B) = H(A) + H(\frac{B}{A})$$

(3.22)

Условная энтропия

$$H(A) \geq H(\frac{B}{A}),$$

А равенство условной и безусловной энтропии имеет место при независимости ансамблей B и A.

Отметим следующее. Если ансамбль A независимо произвольно в ансамбль C, то

$$H(C') \leq H(A),$$

То есть энтропия не возрастает. Знак равенства имеет место при взаимно однозначном преобразовании ансамбля A в ансамбль C.

Если взять последовательность сообщений размерности m, то величина

$$H_m(A) = \frac{1}{m} H(A_1, A_2, A_3, ..A_m)$$

(3.23)

является энтропией стационарного источника на сообщение при $m \to \infty$. Доказано, что этот предел, имеющий смысл среднего количества информации, порождаемого источником в единицу времени существует.

3.2. Кодирование дискретных источников информации

В предыдущем параграфе показано, что максимальной энтропией обладает источник, у которого вероятности появления отдельных букв алфавита (символов) равны. В реальности это далеко не всегда выполняется. В качестве примера возьмем алфавит русского языка. При равномерной и независимой передаче букв энтропия этого источника информации составляла бы

$$\log K = \frac{5бит}{символ}$$

В действительности в осмысленном тексте буквы передаются не хаотически и показываются существенно связанными. Результаты статического анализа большой совокупности русской художественной прозы показывают, что энтропия данного источника принимает значения не превосходящие $1.5 \frac{бит}{символ}$. Еще более связанными, и следовательно, более запоминающимся, является стихотворный текст. Энтропия стихотворного источника имеет еще меньшие значения. Учет неравновероятности появления приводит к уменьшению энтропии лишь до значения $4{,}35 \frac{бит}{символ}$. Наличие статической связи между буквами уменьшает энтропию до указанных значений.

Для оценки неравновероятности появления букв и их статической зависимости используется понятие избыточности источника

$$\eta = \frac{H_{\max}(A) - H(A)}{H_{\max}(A)}$$

(3.24)

Если $\eta = 0$, то такой источник называется источником избыточности. В руссом языке $\eta = 0.8$. Примерно такую же избыточность имеет и английский язык.

Если создать сообщения длительностью n

$B_n = A_1, A_2, A_3, ..A_n$

То статические связи между сообщениями B_n исчезают с ростом n. Ранее указывалось, что существует предел при $n \to \infty$, представляющий собой среднее количество информации H, порождаемое источником в единицу времени, и называемое энтропией стационарного источника на сообщение. С этой величиной H связана задача эффективного кодирования источника.

Эффективное кодирование заключается в следующем. С целью достижения максимальной скорости передачи информации по каналу без помех необходимо так преобразовать сигналы от источника сообщений, чтобы уменьшилась избыточность нового алфавита. Устройство, осуществляющее такое преобразование, называют кодирующим. Приемник сообщений должен содержать декодирующее устройство, причем преобразование сигнала источника в кодовую последовательность и обратное преобразование должны быть однозначными.

Процесс сокращения избыточности источника получил название эффективного кодирования сообщений, а коды, обеспечивающие решение этой задачи, называют статическими кодами. Универсальным способом сокращения избыточности источника является укрупнение сообщений. Смысл укрупнения заключается в кодировании источника, а последовательности состояний определенной длительности. Таким образом, кодирование сообщений ансамбля A посредством кода B называется отображение множества сообщений в множество кодовых слов.

Равномерное кодирование заключается в следующем. Все последовательности сообщений источника длиной n делятся на две группы. В первую группу включают так называемые высоковероятностные последовательности сообщений, во вторую – все остальные последовательности. При неравномерном распределении вероятностей сообщений источника доля высоковероятностных последовательностей уменьшается с ростом n. Эти две группы образуют два подмножества блоков. Первое из указанных создается последовательностями – блоками длины n, однозначно отображаемыми кодовыми словами. Это подмножество называется множество однозначно кодируемых и декодируемых блоков. Остальные блоки образуют второе подмножество, которому соответствует одно единственное кодовое слово. Длина l всех кодовых слов одинакова; она определяется числом M кодовых слов: l – наименьшее целое удовлетворяющее неравенству

$$m^l \geq M$$

Где основание кода (число кодовых символов).

Процесс кодирования и декодирования заключается в разбиении последовательности сообщений на выходе источника на блоки длиной n и сопоставлении каждому блоку соответствующего кодового слова длиной l. Ошибкой процедуры декодирования при этом является событие, состоящее в появлении неоднозначного кодируемого блока. Количество m-ичных кодовых символов, приходящихся на одно кодовое сообщение, определяется соотношением $\frac{l}{n} \geq \frac{\log M}{\log m}$. Число

$$R = \frac{\log M}{n}$$

(3.25)

Для заданных значений M и n называется скоростью равномерного кодирования источника и обычно имеет размерность числа двоичных символов на сообщение.

Основная задача при кодировании равномерными кодами заключается в определении наименьшей возможной скорости кодирования, при которой вероятность ошибочного декодирования может быть сделана сколь угодно малой. Наименьшая достижимая скорость R является характеристикой кодируемого источника и носит название скорости создания информации. В это же время энтропия источника $H(A)$ может рассматриваться как скорость создания информации, если может быть доказано следующее утверждение: для любого $R > H(A)$ и произвольного положительного δ найдется значение n и код со скоростью 1, для которого вероятность ошибки не превосходит δ. Это утверждение является прямой теоремой кодирования источника.

Обратной теоремой кодирования источника является утверждение: для любого $R < H$ найдется зависящее от R положительное число δ такое, что всех n и всех равномерных кодов со скоростью R вероятность ошибочного декодирования больше δ.

3.2.1. Неравномерное кодирование

Если источник сообщений не имеет памяти (отдельные сообщения статистически независимы), а избыточность обусловлена лишь неравномерностью отдельных сообщений, кодирование неравномерными кодами может снизить данную избыточность. Идея такого кодирования заключается в следующем. Более вероятные сообщения кодируются кодовыми словами меньшей длины, а менее вероятные – более длинными кодовыми словами. Идея кодирования неравномерными блоками впервые нашла применение в азбуке Морзе, где наиболее короткие комбинации «точек» и «тире» использованы для наиболее часто встречающихся букв.

Для неравномерных кодов важной характеристикой является средняя длина кодового слова, приходящееся на одно сообщение источника:

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^{K} d_i p_i$$

(3.26)

где d_i - число кодовых символов i -ого сообщения; p_i - вероятность i -того сообщения.

В общем случае неравномерный код используется для кодирования отрезков сообщений длины n . Тогда величина

$$R = \frac{\bar{d}_n \log m}{n}$$

(3.27)

Где $\bar{d}_n$ - средняя длина кодовой комбинации для n сообщений источника, является средней скоростью неравномерного кодирования m -ичным кодом при разбиении последовательности сообщений на блоки длиной n .

3.2.2. Оптимальные неравномерные двоичные коды

Оптимальным двоичным кодом называется код, при котором средняя длина кодового слова минимальна.

Справедливо следующее утверждение (теорема Шеннона)

$\bar{d} \geq H(A)$

Где $H(A)$ - энтропия исходного алфавита.

Доказано, что знак равенства достигается при

$$p_i = 2^{-\kappa_i}, i = 1,2..\kappa$$

(3.28)

где κ_i – целые положительные числа.

Данная теорема Шеннона определяет минимальную среднюю длину кодового слова, но не указывает метода построения оптимальных кодов.

Известны два метода оптимального кодирования: Шеннона - Фано и Хаффмана. Причем при условии (3.28)

$\bar{d} = H(A)$

Метод Шеннона – Фано заключается в следующем:

1)Множество сообщений разбивается на два равномерных подмножества. Для всех сообщений из первого подмножества положить первый кодовый символ 0, для второго подмножества – 1.

2)Каждое из подмножеств рассматривается как некоторое новое множество сообщений, которое снова разбивается на два примерно равномерных подмножества. Данным подмножеством такие присваивается кодовые символы 0 и 1.

3)Такое разбиение каждого из подмножеств заканчивается в том случае, если в них остается по одной букве алфавита.

4)Каждая буква алфавита соответствует кодовому слову, образованное из кодовых символов последовательно записанных для каждого из подмножеств, в которые входила данная буква.

Приведем пример построения кода Шеннона – Фано для алфавита заданного таблицей 3.1

таблица 3.1

Буква алфавита	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
вероятность	0,1	0,05	0,3	0,15	0,06	0,12	0,12	0,1

Образуем два подмножества согласно п.1 и п.2

$(a_1 a_3 a_8) - 0$;

$(a_2 a_4 a_5 a_6 a_7) - 1$;

Затем согласно п.3

$(a_1 a_8) - 0$; $(a_1) - 0$;

$(a_3) - 1$; $(a_8) - 1$;

$(a_6 a_7) - 0$; $(a_6) - 0$;

$(a_7)-1$;

$(a_2 a_4 a_5)-1$; $(a_4)-0$;

$(a_2 a_5)-1$; $(a_2)-0$.

$(a_5)-1$.

Тогда согласно п.4 получим кодовые слова для каждой буквы алфавита (таблица 3.2)

Таблица 3.2

Буква алфавита	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
Кодовое слово	000	1110	01	110	1111	100	101	001

Для данного процесса энтропия

$$H=-\sum_{i=1}^{8} p_i \log_2 p_i ,$$

А средняя длина кодового слова

$$\bar{d}=\sum_{i=1}^{8} d_i p_i = 0{,}1\cdot 3+0{,}05\cdot 4+0{,}3\cdot 2+0{,}15\cdot 3+0{,}06\cdot 4+0{,}12\cdot 3+0{,}12\cdot 3+0{,}1\cdot 3=2{,}81$$

Сравнение значение величины H и $\bar{d}$ для рассматриваемого примера показывает, что данный код близок оптимальному. Отметим, что полученный код удовлетворяет условию префиксности.

Более наглядно данный код можно представить кодовым деревом (рис. 3.1)

Другой метод получения оптимального префиксного кода носит называние «метода Хаффмана». Здесь предполагается, что буквы алфавита упорядочены так, что

$$p(a_1)\geq p(a_2)\geq \ldots p(a_n).$$

В основании метода лежит три леммы.

1. В оптимальном коде слово, соответствующее наименее вероятному сообщению (букве), имеет наибольшую длину.
2. В оптимальном двоичном префиксном коде два наименее вероятных сообщения кодируются словами одинаковой длины, один из которых заканчивается нулем, а другой единицей.
3. Если оптимален однозначно декодированный префиксный код для алфавита 1, то оптимален полученный из него префиксный код для алфавита 1. под алфавитом 1 понимается алфавит, полученный из 1 путем объединения двух наименее вероятных букв в одну с вероятностью появления новой буквы равной сумме вероятностей этих наименее вероятных букв.

Иными слова, задача построения оптимального кода методом Хаффмена сводится к задаче построения оптимального кода для алфавита, содержащего на одно сообщение меньше. В этом алфавите снова можно две наименее вероятные буквы и, объединяя их, можно получить новый алфавит, содержащий теперь уже не два сообщения меньше, чем исходный. В итоге мы приходим к алфавиту, содержащему всего два слова, кодируемые символами 0 и 1.

Рассмотрим пример. Исходный алфавит представлен в таблице

Таблица 3.2

Буква алфавита	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
$p(a_i)$	0,15	0,05	0,07	0,1	0,09	0,12	0,04	0,15	0,1	0,13

Объединением буквы a_7 и a_2 в одну букву $в_1$ с вероятностью появления 0,09. получаем новый алфавит:

Таблица 3.3

Буква алфавита	a_1	a_3	a_4	a_5	a_6	a_8	a_9	a_{10}	$в_1$
p_i	0,15	0,07	0,1	0,09	0,12	0,15	0,1	0,13	0,09

В этом алфавите снова объединяем две наименее вероятные буквы a_3 и в одну букву $в_2$ с вероятностью 0,16 и получаем алфавит:

a_1, a_4, a_6, a_8, a_9, a_{10}, $в_1$, $в_2$ с указанными вероятностями появления букв.

Данная процедура продолжается до тех пор, пока не останется две буквы. Эта процедура может быть представлена следующей логической последовательностью:

$a_1(0{,}15)$, $a_2(0{,}05)$, $a_3(0{,}07)$, $a_4(0{,}1)$ $a_5(0{,}09)$, $a_6(0{,}12)$, $a_7(0{,}04)$, $a_8(0{,}15)$, $a_9(0{,}1)$, $a_{10}(0{,}13) \to$ $a_1(0{,}15)$, $a_3(0{,}07)$, $a_4(0{,}1)$ $a_5(0{,}09)$, $a_6(0{,}12)$, $a_8(0{,}15)$, $a_9(0{,}1)$, $a_{10}(0{,}13), в_1(0{,}09) \to$ $a_1(0{,}15)$, $a_4(0{,}1)$, $a_6(0{,}12)$, $a_8(0{,}15)$, $a_9(0{,}1)$, $a_{10}(0{,}13), в_1(0{,}09), в_2(0{,}16) \to$ $a_1(0{,}15)$, $a_6(0{,}12)$, $a_8(0{,}15)$, $a_9(0{,}1)$, $a_{10}(0{,}13), в_1(0{,}09), в_2(0{,}16), в_3(0{,}19) \to$ $a_1(0{,}15)$, $a_8(0{,}15)$, $a_{10}(0{,}13), в_1(0{,}09), в_2(0{,}16), в_3(0{,}19), в_4(0{,}22) \to$ $a_1(0{,}15)$,

$$в_1(0{,}09), в_2(0{,}16), в_3(0{,}19), в_4(0{,}22), в_5(0{,}28) \to в_3(0{,}19), в_4(0{,}22), в_5(0{,}28), в_6(0{,}31) \to$$
$$\to в_5(0{,}28), в_6(0{,}31), в_7(0{,}41) \to в_7(0{,}41), в_8(0{,}59).$$

Построим кодовое дерево (рис.3.2)

В таблице 3.4 приведена соответствующая кодовому дереву коды букв исходного алфавита

Таблица 3.4

Буква алфавита	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
Кодовое слово	110	0011	1110	000	1111	010	0010	100	011	101

Средняя длина кодового слова

$$\bar{d} = 3 \cdot 0.15 + 4 \cdot 0.05 + 4 \cdot 0.07 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.09 + 3 \cdot 0.12 + 4 \cdot 0.04 + 3 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.1 +$$
$$+ 3 \cdot 0.13 = 3.25$$

Энтропия источника сообщений

$$H = -\sum_{i=1}^{10} p_i(a_i) \log_2 p_i(a_i).$$

Как и следовало ожидать $H < \bar{d}$.

3.2.3. Дискретные каналы передачи сообщений

В системе передачи сообщений канал связи включает любую совокупность технических средств. Например, для радиодиапазона шкалы электромагнитных колебаний канал связи включает в себя наряду с физической средой модуляторы, кодирующие и декодирующие устройства, антенны передатчика и приемника и т.д. Абстрагируясь от конкретной физической природы все многообразие каналов связи можно классифицировать следующим образом:

- Канал называется дискретным по входу (выходу), если множество входных (выходных) сигналов является счетным.
- Канал называете непрерывным по входу (выходу), если множество входных сигналов является несчетным.
- Канал называется дискретным по входу и непрерывным по выходу, если множество входных сигналов конечно, а множество выходных сигналов несчетно (полунепрерывный канал).
- Канал носит название канала с дискретным временем, если сигналы на его входе и выходе представляют собой конечные или бесконечные последовательности из элементов некоторых ансамблей.
-

Дискретный по входу и выходу канал с дискретным временем называется дискретным каналом.

Канал называется каналом с непрерывным временем, если сигналы на его входе и выходе являются непрерывными функциями времени.

Непрерывный по входу и выходу канал с непрерывным временем называют непрерывным каналом.

Полное аналитическое описание канала связи с учетом воздействия помех задается вероятностными характеристиками сигнала на входе и выходе.

Для дискретных каналов с помехами и возможной трансформации кодовых символов статистика сигналов полностью описывается условными вероятностями перехода входных последовательностей a в выходные $в$.

Канал называется каналом без памяти, если для любой последовательности $a = \left\{a^{i}, a^{(i+1)}, ...a^{(i+n-1)}\right\}$ и последовательности $в = \left\{в^{i}, в^{(i+1)}, ...в^{(i+n-1)}\right\}$ объемом n имеет место равенство:

$$p(\frac{в^{i}, в^{(i+1)}, ...в^{(i+n-1)}}{a^{i}, a^{(i+1)}, ...a^{(i+n-1)}}) = \prod_{i=j}^{j+n-1} p(\frac{в^{i}}{a^{i}})$$

Иными словами, в каналах без памяти преобразование a_j сообщение на выходе канала связи в $в_j$ на выходе не зависит в вероятностном смысле от предыдущих входных и выходных сообщений.

Поскольку вероятность

$$p(a, в) = p(a) p(\frac{в}{a}) = p(в) p(\frac{в}{a})$$

то

$$I(a, в) = I(a) - I(\frac{a}{в}) = I(в) - I(\frac{в}{a})$$

Следовательно, количество информации в сообщении a о сообщении $в$ равно количеству информации в сообщении $в$ о сообщении a. Поэтому величину $I(a, в)$ называют количеством взаимной информации между сообщениями a и $в$.

Среднее количество взаимной информации

$$I(A, B) = H(A) - H(\frac{A}{B})$$

где $H(A)$ – энтропия источника сообщений; $H(\frac{A}{B})$ – условная энтропия источника A при наблюдении сообщений B на выходе канала связи.

Величину $I(A, B)$ на один символ обычно называют переданной информацией, а величину $H(\frac{A}{B})$ – потерянной информацией.

Величину $H'(A) = \frac{H(A)}{T}$, где T – время затраченное источником информации на выработку одной буквы алфавита, называют производительностью источника. Также вводят величины $H'(\frac{B}{A}) = \frac{H(\frac{B}{A})}{T}$ и $I'(\frac{B}{A}) = \frac{I(\frac{B}{A})}{T}$.

Тогда величину

$$I'(A,B) = H'(A) - H'(\frac{A}{B})$$

Называют скоростью передачи информации.

Для оценки потенциальных возможностей канала будем полагать, что на вход канала могут быть поданы сигналы от всех возможных источников дискретных сообщений с одинаковым количеством символов в единицу времени и числом элементарных символов, но с разными распределениями вероятностей $p(a_j)$. Для каждого такого источника энтропия различна, различно и количество информации, переданной по каналу. Максимальное количество преданной информации, учитывающее всевозможные источники входного сигнала, характеризует свойства самого канала. Эту величину информации и называют пропускной способностью канала:

$$C = \max I(A,B), \frac{бит}{символ}$$

Пропускная способность

$$C' = \frac{C}{T}$$

Является пропускной способностью в единицу времени.

Например, пропускная способность двоичного симметричного канала без памяти

$$C' = \frac{1}{T}\left[1 + p\log\frac{p}{m-1} + (1-p)\log(1-p)\right]$$

где p – вероятность трансформации при передачи кодового символа; m – объем исходного алфавита.

Код с длиной n и объемом M характеризуется скоростью кода

$$R = \frac{\log M}{n}$$

При кодировании в канале с шумами основополагающими являются прямая и обратная теоремы Шеннона. Прямая теорема при любом $R < C$ и любом положительном δ существует код достаточно большой длины n, максимальная вероятность ошибки $p_{\max}$ которого удовлетворяет неравенству $p_{\max} \leq \delta$. Обратная теорема: для всякого $R > C$ найдете положительное δ такое что $p_{\max} \geq \delta$ для любого n и любого кода.

Из прямой теоремы Шеннона следует, что пропускная способность является не просто максимально возможной скоростью передачи информации, но и максимальной скоростью, при которой еще возможна передача со сколь угодно малой скоростью ошибки.

Следует отметь, что данные теоремы Шеннона носят характер теорем существования, конкретных конструктивных алгоритмов кодирования и декодирования, а также методов их построения в них не дается.

Если обратиться непосредственно к источнику информации, то можно на основании прямой теоремы сформулировать основную теорему Шеннона.

Основная теорема: если производительность меньше пропускной способности канала с помехами в единицу времени ($H'(A) < C'$), то существует способ кодирования и декодирования, при котором вероятность ошибочного декодирования может быть сколь угодно малой.

Наличие помех в канале связи обуславливает необходимость исправление ошибок при приеме информации. Исправление ошибок возможно только за счет избыточности кода. Под избыточностью кода понимается ситуация когда

$$m^n > K$$

где m – основание кода; n – длина кодового слова; K – объем исходного алфавита. В этом случае все кодовые комбинации делятся на два класса – разрешенные и неразрешенные. Разрешенные кодовые комбинации – это такие комбинации кодовых символов, каждой из которых однозначно соответствует сообщение (буква) источника. Разрешенная кодовая комбинация при прохождении через канал может за счет действия помех превратиться в неразрешенную, факт появления которой и приведет к необходимости исправления ошибки.

Литература

1. Вентцель Е.С. теория вероятностей. Учебник для вузов. – 8-ое изд. стереотип. – М.: Высшая школа, 2002. – 576с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике. Учебник для вузов. – 8-ое изд. стереотип. – М.: Высшая школа, 2003. – 403с.
3. Березовский Р.М. Функциональный анализ: Курс лекций. – Киев: Высшая школа, 1990. – 600с.
4. Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004. – 502с.
5. Демьянов В.Ф. условие экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005 – 334с.
6. Котоусов А.С. Теория информации. Учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2003 – 770с.
7. Левин Б.Р. Теоретические основы радиотехнической техники. – М.: Сов.радио, 1975. – 391с.