Федеральное агентство по образованию Российской Федерации (РФ)

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра Электронных приборов (ЭП)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой ЭП
__________ С.М. Шандаров

Статистические модели систем передачи и отображения информации

Учебно-методическое пособие

Разработчик:
доцент каф. ЭП
_______________ М.С. Квасница

2007

Содержание

Введение

Изучение курса статические модели систем передачи и отображение информации предполагает не только усвоение общих принципов вероятностного подхода к анализу и проектировании информационных систем, но и приобретение практических навыков решения конкретных задач. Характер моделей исследуемых систем, а именно, вероятностный, обуславливает необходимость определения усредненных характеристик данных систем. Техника вычисления данных характеристик базируется на основных представления теории вероятности, главным из которых является понятие среднего значения наблюдаемой величины. Надо признать, что инженерные представления о рассматриваемом среднем значении как об арифметическом среднем при достаточно большом числе наблюдение не противоречат в практической области общим принципам теории вероятностей. Именно операция усреднения наблюдаемых значений выходного сигнала информационной системы является основной для исследуемой данной системы.

Выработке практических навыков получения усредненных характеристик информационных систем и посвящено, в основном, данное учебно-методическое пособие.

С этих позиций целесообразно представлять усреднение как некую реальную операцию преобразования всей совокупности возникающих сигналов. Принципиально важным свойством операции является линейность и необратимость. Кроме того, если наблюдается значение произведения двух независимых случайных величин, то средние от произведения равно произведению средних.

Информационный сигнал может, в общем случае, может представлять собой либо случайную величину, либо случайный процесс, либо случайное сообщение. Аналогично учебному пособию по изучению курса, данное пособие состоит из трех частей. В первой части информационный сигнал представляет собой случайную величину, во второй – случайный процесс, в третей –

случайное сообщение.

Каждая часть пособия содержит необходимый минимум теоретический минимум для решения задач. В приложении представлены рекомендуемые задачи.

Автор данного пособия не претендует на новизну и оригинальность всех приводимых в ней материалов и посчитал возможным не указывать по ходу их изложения первоисточника.

1. Информационные системы с постоянными сигналами.

1.1. Случайная величина и ее параметры.

Случайная величина X однозначно задана, если известна ее функция распределения

$$F(x) = P(X \le x) \tag{1.1}$$

где x – аргумент функции;

или ее плотность распределения

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \tag{1.2}$$

или ее характеристическая функция

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{jx\omega} dx \tag{1.3}$$

В качестве параметров выступают, как правило, начальные m_k или центральные моменты распределения:

$$m_k = \overline{X^k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx; k = 1,2,3... \tag{1.4}$$

$$M_k = \overline{(X - \overline{X})^k} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^k f(x) dx; k = 2,3...$$

Связь между центральным и начальным распределением можно установить, учитывая, что

$$(a + в)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i в^{k-i}$$

Начальный момент первого порядка m_1 является средним значением $\overline{X}$ случайной величины X, а центральный момент второго порядка M_2 имеет персональное наименование – дисперсия σ^2 случайной величины X. Квадратный корень из дисперсии – среднеквадратическое отклонение. Отношение

$$\delta = \frac{\sqrt{M_2}}{m_1} = \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\overline{x}} \tag{1.5}$$

называют относительными флуктуациями случайной величины X.

Если известна характеристическая функция $\varphi(\omega)$, то можно вычислить моменты распределения любого порядка. Например,

$$\sigma^2 = -\frac{d^2\varphi(\omega)}{d\omega^2}|_{\omega=0} + \left(\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}|_{\omega=0}\right)^2 \qquad (1.6)$$

Вычисление среднего значения $\overline{g(x)}$ от функции $g(x)$ указано во введении. Данный пример обобщается на случай функции многих переменных $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$:

$$\overline{g(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \ldots x_n) f(x_1, x_2, \ldots x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

где $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ – многомерная плотность распределения всей совокупности случайной величины $x_1, x_2, \ldots x_n$. Если $x_1, x_2, \ldots x_n$ – независимые случайные величины, то

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$$

где $f_i(x_i)$ – плотность распределения случайной величины x_i. Практическое правило вычисление среднего значения $\overline{g(x_1, x_2, \ldots x_n)}$ можно сформулировать следующим образом: усреднение производиться по каждой случайной величине последовательно в произвольном порядке, при этом считая оставшиеся случайные величины произвольными постоянными. По существу, данное правило отражает правило многомерного интервала.

Дискретность случайной величины X вносит ряд неудобств в представление и ее основных характеристик. Так, например, плотность распределения

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x - x_i)$$

где n – число возможных значение случайной величины X; x_i – значение данной случайной величины; а p_i – вероятность данного значения; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Специфичность дельта – функции обуславливает особенности вычисления моментов распределения данной случайной величины и ее характеристической функции:

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \tag{1.7}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x e^{j\omega x_i} p_i$$

Если всевозможные значения случайной величины X представляют собой натуральные числа, включая 0, то вместо характеристической функции $\varphi(\omega)$ используют понятие производящей функции $\nu(z)$:

$$\nu(z) = \overline{z^n} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i ; X = n \tag{1.18}$$

где $z = e^{j\omega}$. Тогда

$$\overline{n} = \overline{X} = \frac{\partial \nu}{\partial z}\Big|_{z=1} ;$$

$$\sigma_n^2 = -\frac{d^2\nu}{dz^2}\Big|_{z=1} + \overline{n} - \overline{n}^2$$

Задача 1.1

Интервал времени безотказной работы информационной системы Т является случайной величиной с плотностью распределения вероятностей

$$f(N) = \alpha \cdot e^{-\alpha T}, \qquad \alpha > 0; T \geq 0$$

Определить относительные флуктуации интервала времени безотказной работы системы.

Решение:

Среднее $\overline{T}$ и дисперсия σ_T^2 равны:

$$\overline{T} = \int_0^{\infty} T \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha T} dT ;$$

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} T^2 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha T} dT - \overline{T}^2$$

Вычисление данных интервалов, например, интегрируя по частям, в принципе не сложно, но довольно утомительно и громоздко. Технически проще вычислить $\overline{T}$ и σ_T^2 используя характеристическую функцию

$$\varphi(\omega) - \int_0^{\infty} \alpha \cdot e^{-\alpha T} e^{j\omega T} dT = \frac{\alpha}{\alpha - j\omega}$$

Тогда

$$\overline{T} = \frac{1}{j}\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}\bigg|_{\omega=0} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\overline{T^2} = -\frac{d^2\varphi(\omega)}{d\omega^2}\bigg|_{\omega=0} = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$\sigma_T^2 = \overline{T^2} - \overline{T}^2 = -\frac{1}{\alpha^2};$$

а относительные флуктуации

$$\delta = \frac{\sigma_T}{\overline{T}} = 1$$

То есть, являются постоянными величинами.

Роль данного распределения в различных областях науки и техники трудно переоценить. Так, например, распределены расстояния между звездами, интервалы времени между актами распада ядер радионуклидов, моментами спонтанных переходов и др. его значимость в квантовой механике сравнима, по мнению автора, с распределение Лоренца и позволяет формировать соотношения неопределенностей.

<u>Задача 1.2.</u>

Число n квантов спонтанного излучения регистрируемого фотоприемником за время измерения T является случайной величиной с вероятностью

$$p_n = \frac{(\lambda T)^n}{n!}e^{-\lambda T}$$

где λ – параметр распределения.

Определить относительные флуктуации числа n квантов спонтанного распределения.

<u>Решение</u>

Среднее и дисперсия

$$\overline{n} = \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{(\lambda T)^i}{i!}e^{-\lambda T};$$

$$\overline{n^2} = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{(\lambda T)^i}{i!} e^{-\lambda T} \;;$$

$$\sigma_n^2 = \overline{n^2} - \overline{n}^2$$

Непосредственное вычисление данных сумм весьма громоздко и утомительно. Технически проще найти $\overline{n}$ и $\overline{n^2}$ на основе производящей функции $\nu(z)$ для данного распределения p_n:

$$\nu(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z \frac{(\lambda T)^i}{i!} e^{-\lambda T} = e^{-\lambda T} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^i}{i!} = e^{-\lambda T + \lambda T z}$$

Тогда

$$\overline{n} = \frac{\partial \nu}{\partial z}\Big|_{z=1} = \lambda T$$

Из определения производящей функции как

$$\nu(z) = \overline{z^n}$$

и свойств операции усреднения

$$\frac{d\nu}{dz} = \overline{n z^{n-1}}; \qquad \frac{d^2\nu}{dz^2} = \overline{n(n-1) z^{n-2}}$$

для данного распределения

$$\overline{n(n-1)} = \frac{d^2\nu}{dz^2}\Big|_{z=1} = (\lambda T)^2 \,,$$

откуда следует

$$\overline{n^2} = (\lambda T)^2 + \lambda T$$

$$\sigma_n^2 = \lambda T \,,$$

то есть

$$\sigma_n^2 = \overline{n}$$

Относительные флуктуации

$$\delta = \frac{\sqrt{\lambda T}}{\lambda T} = \frac{1}{\sqrt{\lambda T}}$$

Рассмотренное распределение является распределение Пуассона и его роль в различных областях также трудно переоценить. Это распределение является базовым в квантовой электронике и оптоэлектронике, астрофизике, теории надежности, теории массового обслуживания, биологии и др. данные выражения для относительных флуктуаций является основой для расчета и проектирования целых классов приборов и систем. Величина λT характеризует, по существу, объем сигналов в теории связи. С другой стороны, величину λ можно рассматривать как мощность сигнала, а параметр Т как постоянную времени измерительной системы.

1.2. Оценивание информационных сигналов

В практических задачах чаще всего в качестве информационного сигнала выступает среднее значение s случайной величины X ($s = \overline{X}$). Тогда величину

$$x = X - s$$

Можно рассматривать как шумовую составляющую наблюдаемой величины (погрешность измерения). Проектирование измерительной системы предполагает разработку алгоритма обработки совокупности наблюдаемых значений случайной величины X. Шумовая составляющая этой величины, в общем случае, от наблюдения к наблюдению может менять свои свойства, в частности дисперсию. Более того, дополнительными источниками шумов в данной системе могут быть непостоянство (случайность) числа наблюдений, интервала наблюдений, а также необратимые преобразования наблюдаемых значений величины X, например при квантовании по уровню (аналого-цифровое преобразование).

Оптимальность алгоритма обработки наблюдаемых значений определяется критерием оптимальности. Существует весьма большое количество критериев оптимальности (критерий Неймана – Пирсона, критерий идеального наблюдения), но наиболее распространен критерий минимума среднеквадратической погрешности.

Алгоритм обработки наблюдаемых значений X с целью оптимального оценивания s являются как правило линейными, то есть оценка неизвестного параметра s

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i + B \qquad (1.9)$$

где X_i – наблюдаемые значения случайной величины X; N – число наблюдений; α_i и B – параметры линейной системы.

Требования несмещенности оценки $\dot{s}$ (равенство нулю систематической погрешности итоговой оценки неизвестного параметра s) и линейности алгоритма обработки.

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i s + B = s$$

Приводят к необходимости выполнения следующих соотношений:

$$B = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

(1.10)

Оптимизация алгоритма обработки наблюдаемых значений X_i означает выбор таких значений α_i, при которых дисперсия оценки $\dot{s}$ минимальна. Наличие ограничение $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$ обуславливает необходимость рассмотрения этой задачи как задачи математического программирования, в частности, линейного программирования.

Задача 1.3

По совокупности неравноточных измерений неизвестного параметра 1 сформировать оптимальную по минимуму среднеквадратической погрешности линейную оценку данного параметра. Определить дисперсию данной оценки.

Решение.

Представим входные сигналы X_i следующим образом

$$X_i = x_i + S; \qquad \overline{x_i^2} = \sigma_i^2$$

а оценка неизвестного параметра S

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i$$

Тогда

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \sigma_i^2$$

(1.11)

где σ_i^2 – дисперсия оценки $\dot{S}$. Минимизация данной дисперсии по α_i без учета ограничения

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

приводит к тривиальному решению

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_N = 0$$

$$\sigma^2 = 0$$

И систематической погрешности равной значению S.

Ограничение в виде равенства позволяет свести данную задачу отыскания экстремума функции, многих переменных. Для этого выразим один из параметров системы, например α_N через другие:

$$\alpha_N = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \qquad n = N - 1.$$

Тогда

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + (1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i)^2 \sigma_N^2$$

(1.12)

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i \sigma_i^2 - 2(1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\sigma_N^2$$

(1.13)

а отыскание оптимальных значений α_i сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} (1+\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_N^2})\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n=1 \\ \alpha_1+\alpha_2(1+\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2})+\alpha_3+...+\alpha_n=1 \\ \text{..} \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n(1+\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2})=1 \end{cases}$$

(1.14)

Решаем эту систему уравнений методом Крамера.

Найдем определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1+\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_N^2} & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1+\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2} & 1 & ... & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & .... & 1 \end{vmatrix}$$

Расписав его по первому столбцу

$$\Delta=(1+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_N^2})(-1)^{1+1}M_{11}+1(-1)^{1+2}M_{12}+$$
$$+1(-1)^{1+3}M_{13}+..+(-1)^{1+n}M_{1n}$$

(1.15)

где M_{ij} – соответствующий минор. Для нахождения параметров α_i, например, α_1, запишем определитель Δ_1

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_N^2} & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2} & 1 & ... & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & .... & 1+\frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2} \end{vmatrix}$$

(1.16)

Значение определителя Δ_1 не изменяется при вычитании первой строки из всех остальных:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2} & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & .... & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2} \cdot \frac{\sigma_3^2}{\sigma_N^2} \cdot .... \frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2} = \frac{\sigma_2^2 \cdot \sigma_3^2 \cdot ... \cdot \sigma_n^2}{\sigma_N^2}$$

(1.17)

С другой стороны, если из выражений (1.16) расписать Δ_1 по первому столбцу

$$\Delta_1 = (-1)^{1+1} M_{11} + 1(-1)^{1+2} M_{21} +$$
$$+ (-1)^{1+n} M_{n1}$$

(1.18)

то сравнивания выражения (1.15) и (1.18) можно записать:

$$\Delta = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_N^2} M_{11} + \Delta_1$$

Выразим M_{11}

$$M_{11}=\begin{vmatrix}1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2} & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1+\frac{\sigma_3^2}{\sigma_N^2} & 1 & \dots & 1\\ . & . & . & . & .\\ 1 & 1 & 1 & \dots. & 1+\frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2} & 1 & 1 & \dots & 1\\ -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2} & \frac{\sigma_3^2}{\sigma_N^2} & 0 & \dots & 0\\ . & . & . & . & .\\ -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2} & 0 & 0 & \dots. & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2}\end{vmatrix}$$

(1.19)

Вычислим данный определитель:

$$M_{11}=\left(1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2}\right)\cdot\frac{\sigma_3^2}{\sigma_N^2}\cdot\frac{\sigma_4^2}{\sigma_N^2}\cdot\ldots\cdot\frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2}+(-1)^1\left(-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2}\right)\cdot\frac{\sigma_4^2}{\sigma_N^2}\cdot\ldots\cdot\frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2}+$$

$$+(-1)^{нечет}\left(-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2}\right)\cdot\frac{\sigma_3^2}{\sigma_N^2}\cdot\ldots\cdot\frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_N^2}\cdot 1=\frac{\sigma_3^2}{\sigma_N^2}\cdot\frac{\sigma_4^2}{\sigma_N^2}\ldots\cdot\frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2}+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2}\cdot\frac{\sigma_4^2}{\sigma_N^2}\ldots\cdot\frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2}+$$

$$+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2}\cdot\frac{\sigma_4^2}{\sigma_N^2}\ldots\cdot\frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_N^2}+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_N^2}\cdot\frac{\sigma_3^2}{\sigma_N^2}\cdot\frac{\sigma_4^2}{\sigma_N^2}\cdot\ldots\cdot\frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2}$$

Определим α_1:

$$\alpha_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\Delta_1}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_N^2}M_{11}+\Delta_1}=\frac{\frac{1}{\sigma_1^2}}{\frac{M_{11}}{\sigma_N^2\cdot\Delta_1}+\frac{1}{\sigma_1^2}}$$

Пусть $A=\dfrac{M_{11}}{\sigma_N^2\cdot\Delta_1}$

$$A = \frac{\frac{1}{\sigma_N^2} \cdot \frac{1}{\sigma_N^{2(n-1)}} (\sigma_3^2 \sigma_4^2 - \sigma_n^2 + \sigma_2^2 \sigma_4^2 - \sigma_n^2 + \ldots + \sigma_2^2 \sigma_3^2 \ldots \sigma_n^2)}{\frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma_n^2 \ldots \sigma_n^2}{\sigma_N^{2(n-1)}}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} + \frac{1}{\sigma_4^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_N^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{1}{\sigma_1^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

(1.20)

Аналогично α_1 находим α_i

$$\alpha_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

Значение α_N находим из соотношения

$$\alpha_N = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}} = \frac{\frac{1}{\sigma_N^2}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

(1.21)

Дисперсия оценки $\dot{S}$ находится из соотношения (1.12):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}{(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2})^2} + \frac{\frac{1}{\sigma_N^2}}{(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2})^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

(1.22)

Анализ выражений (1.20) и (1.22) показывает, что весовой коэффициент

α_i обратно пропорционален погрешности i -ого измерения, а результирующая погрешность оценки неизвестного параметра S меньше любой погрешности отдельного измерения. Если для отдельного измерения (например, $k - того, k = 1,2,...N$) погрешность существенно меньше нежели для других измерений ($\sigma_k^2 \to 0$), то $\alpha_k \to 1$, а $\sigma^2 \to \sigma_k^2$

Задача 1.4

На вход идеального интегратора поступает последовательность импульсов случайной амплитуды А. Число импульсов $И$ за время интегрирования Т является случайной целочисленной величиной с известной производящей функцией $\nu(z)$. Определить относительные флуктуации сигнала y на выходе интегратора.

Решение:

Сигнал на выходе интегратора

$$y = \sum_{i=1}^{N} A_i$$

(1.23)

где A_i – амплитуда i -ого импульса. Выход интегратора является функцией $N+1$ независимых случайных величин: $A_1, A_2, ...A_n u N$. При фиксированном $И$ амплитуда A_i – независимые и одинаково распределенные случайные величины. Тогда

$$\bar{y}\Big|_N = \int_0^\infty A_1 f(A_1) dA_1 + \int_0^\infty A_2 f(A_2) dA_2 + ... + \int_0^\infty A_N f(A_N) dA_N = N\int_0^\infty Af(A)dA = N\overline{A}$$

где $f(A)$ – плотность распределения вероятностей амплитуд А.

Затем усредняем по всевозможным значениям $И$:

$$\bar{y} = \overline{A}\,\overline{N}$$

(1.24)

Дисперсия σ^2 случайной величины y

$\sigma^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$

Тогда

$$\overline{y^2} = \overline{\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right)}$$

(1.25)

В выражение (1.25) усреднение производится по всевозможным значениям $A_1, A_2, \ldots A_n uN$. Раскроем выражение (1.25)

$$\overline{y^2} = \sum_{i=1}^{N} \overline{A_i^2} + 2\overline{A}_1 \cdot \sum_{i=1}^{N} \overline{A_i} + 2A_2 \sum_{i=1}^{N} \overline{A_i} + \ldots + 2\overline{A}_{N-1}\overline{A}_N = N(\sigma_A^2 + \overline{A}) + 2(N-1)\overline{A}^2 +$$
$$+ \ldots + 2\overline{A}^2$$

Данное выражение включает в себя сумму арифметической погрешности

$$\overline{y^2}\big|_N = N(\sigma_A^2 + \overline{A}^2) + 2\overline{A}^2 \frac{(N-1+1)}{2}(N-1) = N(\sigma_A^2 + \overline{A}^2) +$$
$$+ \overline{A}^2(N^2 - N) + \ldots + 2\overline{A}^2$$

(1.26)

Произведем усреднение выражения (1.26) по всевозможным значениям $И$:

$$\overline{y^2} = N(\sigma_A^2 + \overline{A}^2) + \overline{A}^2(N^2 - N) = \overline{N}\sigma_A^2 + \overline{N} \cdot \overline{A}^2 + \overline{A}^2\sigma_N^2 + \overline{N}^2\overline{A}^2 - \overline{N} \cdot \overline{A}^2$$

Окончательно:

$$\sigma^2 = \overline{N}\sigma_A^2 + \overline{A}^2\sigma_N^2 + \overline{N}^2\overline{A}^2 - \overline{N}^2 \cdot \overline{A}^2 = \overline{N}\sigma_A^2 + \overline{A}^2\sigma_N^2$$

(1.27)

$$\delta = \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{\overline{N}}\delta_A^2 - \delta_N^2}$$

(1.28)

где $\delta_A^2 = \dfrac{\sigma_A^2}{\overline{A}^2}$, $\delta_N^2 = \dfrac{\sigma_N^2}{\overline{N}^2}$ – квадрат относительных флуктуаций амплитуд импульсов и их числа соответственно. Результат (1.28) получен непосредственно. Но условия задачи, а именно, независимость и одинаковость распределения амплитуд импульсов, допускают более общее и изящное ее решение.

Введем характеристическую функцию величины y:

$$\varphi(\omega) = \overline{e^{j\omega y}} = \overline{e^{j\omega \sum_{i=1}^{N} A_i}}$$

(1.29)

Усреднение произведем в том же порядке, что и в предыдущем случае:

$$\varphi(\omega)\big|_N = \overline{e^{j\omega A_1}} \cdot \overline{e^{j\omega A_2}} \cdot \ldots \cdot \overline{e^{j\omega A_N}} = \theta^N(\omega)$$

(1.30)

где $\theta(\omega)$ – характеристическая функция случайной величины А. усредняя по всевозможным значениям N получим:

$$\varphi(\omega) = \nu[\theta(\omega)]$$

(1.31)

где $\nu(z)$ – производящая функция случайной величины N, определяемой выражением (1.8).

Таким образом, выражение (1.31) является общим решение поставленной задачи. В частности:

$$\bar{y} = \frac{1}{j}\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=0} = \frac{d\nu}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\omega}\Big|_{\omega=0}$$

При $\omega = 0, \theta(\omega) = 1$, $\frac{d\theta}{d\omega} = jA$, $\frac{d\nu}{d\theta}\Big|_{\theta=1} = \overline{N}$, от куда следует выражение (1.24)

$$\overline{y^2} = -\frac{d^2\varphi(\omega)}{d\omega^2}\Big|_{\omega=0} = \left[\frac{d^2\nu}{d\theta^2}\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)^2 + \frac{d\nu}{d\theta}\cdot\frac{d^2\theta}{d\omega^2}\right]\Big|_{\omega=0} = \overline{N}\sigma_A^2 + \overline{A}^2\sigma_N^2 + \overline{N}^2\cdot\overline{A}^2$$

В этом случае $\nu(z) = e^{-\lambda+\lambda z}$,

то есть для пуассоновского распределения числа N,

$$\overline{N} = \lambda \, , \; \sigma_N^2 = \lambda \, , \; \delta_N^2 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\lambda}(1 + \delta_A^2)}$$

(1.32)

Выражение (1.32) является необычайно важным при расчете и проектировании различном классе информационных систем. Например, данное выражение определяет относительные флуктуации суммарного сигнала с выхода фотоприемника (в частности, лавинного фотодиода), сцинтилляционного детектора радиометрических систем контроля и др.

2. Информационные системы с переменными во времени сигналами

2.1. Случайные процессы и их погрешности

Функция $X(t)$ действительного переменного t называется случайной, если при каждом значении аргумента t она представляет случайную величину. Если параметром t является величина, то случайная функция $X(t)$ является случайным процессом. В отличие от детерминированного процесса, развитие которого априори определено однозначно, случайный процесс представляет такие изменения во времени физического явления или состояния технического объекта, которые задание определить точно не возможно.

Случайный процесс характеризуется множеством функций $x_i(t)$, каждая из которых называется реализацией случайного процесса $X(t)$.

Различают два класса случайных процессов: с дискретным временем и с непрерывным временем.

Значения случайного процесса $X(t_i)$ являются в общем случае, связанными случайными величинами. Однозначно задать случайный процесс означает задать многомерную функцию распределения указанных значений. Для случайных процессов с непрерывным временем данная функция представляет собой функционал.

Усреднение реализаций $x_i(t)$ процесса $X(t)$ или их функциональных преобразований может быть двух типов: усреднение по времени и усреднение по множеству реализаций. Усреднение по множеству реализаций, например, представляет собой выполнение следующей операции:

$$\overline{X(t)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t) \qquad (2.1)$$

где N - число наблюдаемых реализаций.

Случайный процесс $X(t)$ называется стационарным (в узком смысле) тогда и только тогда, когда функция распределения любого порядка не зависит от начала отчета времени. Иными словами, когда любые вероятностные характеристики инвариантны относительно сдвига переменной t .

Случайный процесс называется эргодическим, если любая вероятностная характеристика, полученная усреднением по множеству реализаций, с вероятностью сколь угодно близкой к единице, равна временному среднему, полученному усреднением за достаточно большой промежуток времени из единственной реализации случайного процесса. Например,

$$\overline{X(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) dt \qquad (2.2)$$

равно $\overline{X(t)}$ определяемому выражением (2.1). Заметим, что в данном пособие рассматривается, стационарные эргодические процессы.

Корреляционная функция $B(t_1, t_2)$ случайного процесса $X(t)$ характеризует связь двух случайных величин: $X(t_1)$ и $X(t_2)$. Если бы случайные величины были бы не связаны между собой (не коррелированны), то

$$\overline{X(t_1)X(t_2)} = \overline{X(t_1)} \cdot \overline{X(t_2)}$$

Поэтому мерой связи данных случайных величин является разность между средним от их произведения и произведением средних. Эту разность называют корреляционной функцией $B(t_1, t_2)$:

$$B(t_1, t_2) = \overline{X(t_1)X(t_2)} - \overline{X(t_1)} \cdot \overline{X(t_2)} \qquad (2.3)$$

Для стационарных случайных процессов

$$B(t_1, t_2) = B(\tau) = \overline{X(t)X(t+\tau)} - a^2 \qquad (2.4)$$

где $\tau = t_2 - t_1$; $a = \overline{X(t)}$. Заметим, что

$$B(0) = \sigma^2, \quad \lim_{\tau \to \infty} B(\tau) = 0, \quad B(\tau) = B(-\tau),$$

Где σ^2 - дисперсия данного случайного процесса.

Отношение

$$R(\tau) = \frac{B(\tau)}{B(0)} \qquad (2.5)$$

называют нормированной корреляционной функцией (коэффициентом корреляции случайного процесса).

Величину

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau \qquad (2.6)$$

называют интервалом корреляции.

Практическое значение корреляционной функции трудно переоценить, так как данная функция определяет энергетический спектр случайного процесса:

$$S(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad (2.7)$$

или в случае четности функции $B(\tau)$

$$S(\omega) = 4\int_0^{\infty} B(\tau)\cos\omega\tau d\tau \qquad (2.8)$$

Справедливо обратное:

$$B(\omega) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \qquad (2.9)$$

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} S(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

Корреляционная функция $B(\tau)$ и энергетический спектр $S(\omega)$ как пара преобразований Фурье преобладает всеми присущими преобразованию свойствами. В частности, чем «шире» спектр $S(\omega)$, тем «уже» корреляционная функция $B(\tau)$ и наоборот.

Из выражения (2.4) и (2.9), что средняя мощность случайного процесса с нулевым средним

$$B(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \qquad (2.10)$$

Задача 2.1

Определить энергетический спектр случайного процесса с корреляционной функцией $B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \alpha > 0$.

Решение:

$$S(\omega)=2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{-j\omega\tau}d\tau=2\sigma^2\left[\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau\right]=$$
$$=2\sigma^2\left[\frac{1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}\right]=\frac{4\sigma^2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

1.Преобразование случайных процессов

Преобразование случайных процессов могут быть линейные и нелинейные.

Для линейных преобразований случайных процессов определение параметров выходного процесса $y(t)$ базируется на выражении

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (2.11)$$

где $h(\tau)$ – импульсная переходная функция линейного фильтра. Процесс $y(t)$ в переходном режиме является нестационарным и лишь при $t\to\infty$ становится стационарным.

Задача 2.2

Определить среднее $\overline{y(t)}$ процесса $y(t)$, если $x(t)$ – стационарный процесс.

Решение:

$$\overline{y(t)}=\overline{\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau}=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\overline{x(t-\tau)}d\tau=a\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau. \qquad \overline{x(t)}=a \quad (2.12)$$

Если линейный фильтр устойчивый, то есть, интервал

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau<M$$

сходиться, то в установившемся режиме

$$\overline{y(t)}=a\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau$$

постоянно (во времени не изменяется)

Задача 2.3

Определить корреляционную функцию $B_y(\tau)$ случайного процесса $y(t)$ в установившемся режиме на выходе линейного фильтра с импульсной переходной функцией $h(\tau)$ при поступлении на его вход случайного процесса $X(t)$ с нулевым средним и корреляционной функцией $B_x(\tau)$.

Решение:

По определению корреляционной функции

$B_y(\tau) = \overline{y(t+\tau)y(t)}$,

так как $\overline{y(t)} = 0$.

Из выражения (2.11)

$$B_y(\tau) = \overline{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t+\tau-u)du\right]} =$$

$$= \overline{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(\upsilon)x(t-u)x(t+\tau-\upsilon)dud\upsilon\right]}$$

В силу линейности операции усреднения

$$B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(\upsilon)\overline{x(t-u)x(t+\tau-\upsilon)}dud\upsilon =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(\upsilon)B_x(u-\upsilon+\tau)dud\upsilon \qquad (2.13)$$

Так как при $\overline{x(t)} = 0$

$\overline{x(t-u)x(t+\tau-\upsilon)} = B_x(t+\tau-\upsilon-t+u) = B_x(\tau-\upsilon+u)$.

Если положить $\tau = 0$, дисперсия процесса на выходе линейного фильтра

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(\upsilon)B_x(u-\upsilon)dud\upsilon$$

Задача 2.4

В условиях задачи 2.3 определить энергетический спектр процесса $y(t)$.

Решение:

Из выражения (2.13)

$$S_y(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(\upsilon)B_x(u-\upsilon+\tau)dud\upsilon d\tau$$

Меняем порядок интегрирования:

$$2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} B_x(u-\upsilon+\tau)d\tau = S_x(\omega)e^{-j\omega(u-\upsilon)},$$

согласно свойству Фурье-преобразования и определение энергетического спектра случайного процесса. Тогда

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= S_x(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(\upsilon)e^{-j\omega(u-\upsilon)}dud\upsilon = \\ &= S_x(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-j\omega u}du\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\upsilon)e^{-j\omega\upsilon}d\upsilon\right] = S_x(\omega)H(-j\omega)H(j\omega) = \\ &= S_x(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2 \end{aligned} \qquad (2.14)$$

где $H(j\omega)$ – Фурье-преобразование импульсной переходной функции $h(\tau)$ (передаточная функция линейного фильтра). Величина $|H(j\omega)|^2$ является квадратом амплитудно-частотной характеристики линейного фильтра.

Задача 2.5

Определить корреляционную функцию $B_y(\tau)$ и энергетический спектр $S_y(\omega)$ случайного процесса

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Решение:

В этом случае импульсная переходная функция фильтра

$$h(\tau) = \delta'(\tau)$$

где $\delta'(\tau)$ – производная дельта-функция, а передаточная функция

$$H(j\omega) = j\omega$$

Тогда используя фильтрующее свойство дельта - функции и ее производных

$$\int_a^{в} g(x)\delta'(x-x_0)dx = g'(x_0),$$

$x_0 \in (a, в)$, из выражения (2.13)

$$B_y(\tau) = \frac{d^2 B_x(\tau)}{d\tau^2}$$

Процесс $x(t)$ называется дифференцируемым в среднеквадратическом смысле, если выполняется условие существования (конечности значения) второй производной в нуле корреляционной функции.

Из выражения (2.14)

$$S_y(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$$

Согласно выражению (2.10) условие дифференцируемости процесса $x(t)$ в среднеквадратическом смысле сводится к сводимости интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \omega^2 S_x(\omega)d\omega < M$$

Нелинейные преобразования случайных процессов и определение характеристик выходных процессов, из-за отсутствия единых методов решения таких задач, является в общем случае, крайне сплошным. Аналогично учебному пособию рассмотрим частные задачи.

<u>Задача 2.6</u>

Определить среднее и дисперсию случайного процесса $y(t)$ на выходе логарифмического усилителя при поступлении на его вход случайного процесса $x(t)$ и выполнении условия $\sigma_x^2 << \overline{x(t)}$

<u>Решение</u>:

Процесс на выходе логарифмического усилителя

$$y(t) = k\ln x(t) = k\ln(a + x_0(t)),$$

где $a = \overline{x(t)}$; $x_0(t) = x(t) - a$.

Так как $\dfrac{x_0(t)}{a} << 1$ в среднеквадратическом смысле, то

$$y(t) = k\left[\ln a + \ln\left[1 + \frac{x_0(t)}{a}\right]\right] = k\left[\ln a + \frac{x_0(t)}{a}\right].$$

Тогда

$$\overline{y(t)} = k\ln a,$$

а дисперсия

$$\sigma_y^2 = \frac{k^2}{a^2}\sigma_x^2.$$

Относительные флуктуации δ_y процесса $y(t)$

$$\delta_y = \frac{\sqrt{\sigma_y^2}}{\overline{y(t)}} = \frac{\delta_x}{\ln a}.$$

Следовательно логарифмический усилитель уменьшает относительные флуктуации сигнала в $\ln a$ раз.

Задача 2.7

Исследовать простейший усилитель с автоматической регулировкой усиления в установившемся режимах при «медленных» флуктуациях входного сигнала $x(t)$

Решение:

При «медленных» флуктуациях входной сигнал $x(t)$ может быть представлен как случайная величина x. Тогда

$$y(t) = \left[k_0 - \lambda\gamma \int_0^t y(\tau)h(t-\tau)d\tau \right]$$

Поскольку в простейшем усилителе

$$h(\tau) = \gamma e^{-\gamma\tau}; \gamma > 0,$$

то

$$y(t) = x\left[k_0 - \lambda\gamma e^{-\gamma} \int_0^t y(\tau)e^{-\gamma\tau}d\tau \right] \quad (2.15)$$

а дифференцируя

$$y'(t) = x\left[\gamma^2 e^{-\gamma} \int_0^t y(\tau)e^{\gamma\tau}d\tau - \gamma\lambda y(t) \right] \quad (2.16)$$

Тогда из выражения (2.15)

$$\gamma^2 \lambda e^{-\gamma t} \int_0^t y(\tau)e^{\gamma\tau}d\tau = (k_0 - \frac{y(t)}{x})\gamma,$$

А из выражения (2.16)

$$y'(t) = x\gamma(k_0 - \frac{y(t)}{x}) - \gamma x(t)\lambda y(t)$$

После преобразований

$$y(y) + \gamma(1 + x\lambda)y(t) = k_0 x\gamma$$

Решение данного дифференциального уравнения при $y(0) = k_0 x$

$$y(t) = \frac{k_0 x \gamma}{\gamma(1 + x\lambda)}(1 - e^{-\gamma(1+x\lambda)t})$$

При $t \to \infty$

$$y(t) = y = \frac{k_0 x}{1 + x\lambda} \quad (2.17)$$

Анализ выражения (2.17) показывает, что усилитель с АРУ «снимает» динамический диапазон выходного сигнала y. При любом уровне входного сигнала x выходной сигнал не превышает значение $\frac{k_0}{\lambda}$. Средняя и дисперсия выходного сигнала $y(t)$ определяется, в общем случае, функцией распределения x.

3. Оценивание текущих значений случайного процесса (Винеровская фильтрация).

В данном разделе речь идет о задачах линейного оценивания значений случайного процесса по наблюденным значениям, в общем случае, аддитивной смеси данного сигнала и помехи. В качестве критерия оптимальности выбирается минимум среднеквадратическое погрешности. Данные задачи могут быть непосредственно задачами фильтрации, а так же задачами интерполяции и экстраполяции. Данная совокупность задач обычно называется задачами винеровской фильтрации.

Как указано в учебном пособии, по изучаемой дисциплине, оптимальный фильтр определяется из решения интегрального уравнения Винера – Хопфа. При решении практических задач удобно пользоваться так называемым свойством некоррелированности текущих значений ошибки

$$\varepsilon(t) = \hat{s}(t) - s(t)$$

где $\hat{s}(t)$ – оценка текущих значений полезного сигнала $s(t)$, и наблюдаемой смеси $s(t) + n(t)$ сигнала и помехи $n(t)$ в совпадающие моменты времени.

<u>Задача 2.8</u>

Случайный процесс $X(t)$ наблюдается в момент времени t и $t - T$. Построить оптимальную линейную оценку бедующего значения данного процесса $\hat{x}(t+\tau)$ и определить погрешность оценивания $\overline{x(t)} = 0$.

<u>Решение:</u>

Оценка

$$\hat{x}(t+\tau) = \alpha_1 x(t+\tau) + \alpha_2 x(t)$$

где α_1 и α_2 – коэффициенты, определяющие линейный фильтр. Ошибка

$$\varepsilon(t) = x(t+\tau) - \alpha_1 x(t-\tau) - \alpha_2 x(t)$$

Из свойств некоррелированности ошибки и наблюдаемых значений получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{\varepsilon(t)x(t)} = 0 \\ \overline{\varepsilon(t)x(t-\tau)} = 0 \end{cases}$$

или

$$\overline{\left[x(t+\tau) - \alpha_1 x(t-\tau) - \alpha_2 x(t)\right]} = 0$$
$$\overline{\left[x(t+\tau) - \alpha_1 x(t-\tau) - \alpha_2 x(t) x(t-T)\right]} = 0$$

Поскольку $\overline{x(t)} = 0$, то

$$\overline{x(t+\tau)x(t)} = B(\tau)$$
$$\overline{x(t-T)x(t)} = B(T)$$
$$\overline{x(t)} = \sigma^2$$
$$\overline{x(t+\tau)x(t-T)} = B(\tau - T)$$

где $B(\tau)$ – корреляционная функция процесса $X(t)$. Тогда данная система примет вид:

$$\begin{cases} B(\tau) - \alpha_1 B(T) - \alpha_2 \sigma^2 = 0 \\ B(\tau + T) - \alpha_1 \sigma^2 - \alpha_2 B(T) = 0 \end{cases}$$

В канонической форме данную систему можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha_1 R(T) + \alpha_2 = R(\tau) \\ \alpha_1 + \alpha_2 R(T) = R(T + \tau) \end{cases}$$

где $R(\tau) = \dfrac{B(\tau)}{\sigma^2}$

Решение данной системы и определяет данный фильтр:

$$\alpha_1 = \frac{R(T+\tau) - R(\tau)R(T)}{1 - R^2(T)}$$

$$\alpha_2 = \frac{R(\tau) - R(\tau+T)R(T)}{1 - R^2(T)}$$

Среднеквадратическая ошибка

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\left[x(t+\tau) - \dot{x}(t+\tau)\right]^2} = \sigma^2 - 2\overline{x(t+\tau) - \dot{x}(t+\tau)} + \overline{\dot{x}^2(t+\tau)} =$$
$$= \sigma^2 - \overline{\dot{x}^2(t+\tau)}$$

Отметим при $R(\tau) = e^{-\gamma\tau}$

$\alpha_1 = 0; \qquad \alpha_2 = e^{-\gamma\tau}$

$\overline{\varepsilon^2} = 1 - e^{-\gamma\tau}$

Равенство нулю параметра α_1 означает, что знание значения в момент времени $t - T$ не несет информации о значении случайного процесса $x(t)$ в момент времени $t + \tau$. Этот результат можно объяснить следующим образом. Линейная фильтрация по минимуму среднеквадратической погрешности является оптимальной в широком смысле для гауссовских случайных процессов $X(t)$. При корреляционной функции

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

Гауссовский случайный процесс является Марковским (теорема Дуба), а для Марковских процессов последующее значение коррелированно только с предыдущим значением и некоррелировано со всеми предшествующими значениями.

<u>Задача 2.9</u>

В момент времени t наблюдается аддитивная смесь сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$. Построить оценку значения сигнала $s(t)$ в момент $t + \tau$.

<u>Решение:</u>

Оценка

$$\dot{s}(t + \tau) = \alpha[s(t) + n(t)].$$

Условие некоррелированности погрешности и наблюдаемых значений

$$\overline{[\dot{s}(t + \tau) - s(t - \tau)][s(t) + n(t)]} = 0$$

После преобразования с учетом некоррелированности сигнала и помехи

$$\alpha\sigma_n^2 + \alpha\sigma_S^2 - B(\tau) = 0$$

$$\alpha = \frac{B(\tau)}{\sigma_S^2 + \sigma_n^2}$$

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \sigma_S^2\left[1 - \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \sigma_n^2}R(\tau)\right]$$

Если $\tau = 0$, то

$$\alpha = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \sigma_n^2}; \qquad \overline{\varepsilon^2} = \frac{\sigma_S^2 \sigma_n^2}{\sigma_S^2 + \sigma_n^2}$$

4. Информационные характеристики систем передачи и отражения информации

4.1. Основные понятия теории информации и кодирования

Собственная информация отдельного сообщения a_i ($i = 1,2...,K$)

$$I(a_i) = -\log_b p_i$$

где p_i – вероятность появления сообщения a_i; K – объем алфавита.

Среднее количество собственной информации одного сообщения

$$\bar{I} = -\sum_{i=1}^{K} p(a_i)\log_b p_i$$

Носит наименование энтропии источника сообщений H. Максимальное значение данной энтропии достигается при $p_1 = p_2 = ... = p_K = \frac{1}{K}$

И равно

$$H_{\max} = \log_b K$$

Основание логарифма b определяет масштаб измерения собственной информации и энтропии. Обычно $b = 2$, тога единица информации – бит.

Взаимная информация

$$I(a_i, x_k) = \log p(\frac{x_i}{y_k}) - \log p(x_i)$$

Средняя взаимная информация

$$I(A:X) = \sum_{i=1}^{K}\sum_{k=1}^{M} p(a_i, x_k)\log\frac{p(\frac{a_i}{y_k})}{p(a_i)}$$

где M – объем наблюдаемого алфавита X.

Пропускная способность дискретного канала с шумами без памяти

$$C = \max_{p(A)} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{k=1}^{M} p(a_i)p(\frac{x_k}{a_i})\log\frac{p(\frac{a_i}{x_k})}{p(a_i)}$$

Пропускная способность непрерывного канала

$$C = \Delta f \log(1 + \frac{P_{C'}}{P_ш}) \quad \frac{бит}{сек}$$

где полоса частот сигнала Δf; $P_{C'}$ – средняя мощность стационарного входного сигнала; $P_ш$ – средняя мощность шума, попадающего в полосу частот Δf.

<u>Задача 3.1</u>

По каналу связи без памяти передается сигнал $s(t)$, представляющий собой нормальный процесс с нулевым средним значением, дисперсией $\sigma_S^2 = 8мВт$ и равномерным энергетическим спектром N_0 в полосе частот $\Delta f = 3100Гц$. В канале действует независимая от сигнала флуктуационная помеха типа «белый шум» с энергетическим спектром $N_ш = 3{,}22 \cdot 10^{-7}\ Вт/Гц$, нормальным распределение и средним значением.

Определить средние на один отсчет сигнала количество информации, переданное по каналу.

<u>Решение:</u>

Поскольку спектр равномерный, то отсчеты входного сигнала и помеха, а следовательно, и сигнал на выходе независимы.

$$I(s,z) = h(z) - h(\frac{z}{s}) = h(s) - h(\frac{s}{z})$$

где $h(s)$ – дифференциальная энтропия сигнала s; z – наблюдаемая сумма сигнала и помехи. Поскольку

$$h(s) = \log\sqrt{2\pi\sigma_S^2 e}$$
$$h(z) = \log\sqrt{2\pi(\sigma_S^2 + \sigma_ш^2)e}$$

Тогда

$$h(\frac{s}{z}) = \log\sqrt{2\pi\frac{\sigma_S^2 \cdot \sigma_ш^2}{\sigma_S^2 + \sigma_ш^2}}$$

$$I(s,z) = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{\sigma_S^2}{\sigma_ш^2}) = 1.58\frac{бит}{отсчет}$$

Задача 3.2

Чему равна пропускная способность канала, если средняя мощность сигнала 1мкВт, а помехой является тепловой шум приемного устройства с полосой 10кГц и рабочей температурой $20^\circ C$.

Решение:

Мощность теплового шума может быть оценена из соотношения

$$P_ш = 4kT\Delta f$$

где k – постоянная Больцмана. В данном случае $\Delta f = 10 кГц; \quad T = 293^\circ$. Следовательно

$$P_ш = 4 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 \cdot 10^4 = 1{,}64 \cdot 10^{-16}\, Вт$$

Тогда пропускная способность

$$C = 10^4 \log(1 + \frac{10^{-6}}{10^{-16} \cdot 1.64}) = 3.26 \cdot 10^5 \frac{бит}{сек}$$

Кодирование (в узком смысле) – сопоставление дискретному сообщению $a_i \quad (i = 1,2..., K)$ определенной последовательности кодовых символов, выбираемых из конечного множества элементарных символов $\{b_i\}, i = 1,2,...m$; m – основание кода. Обычно $m = 2$ (двоичное кодирование).

Особый класс образуют статические коды. Эти коды являются неравномерными. Длина кодовой комбинации таких кодов зависит от вероятности выбора соответствующей буквы данного алфавита. Это означает, что наиболее вероятным буквам сопоставляют короткие кодовые комбинации, а менее вероятным – более длинные. Такое кодирование очень часто называют экономным, так как оно позволяет сократить среднюю длину кодовой комбинации. Представителями таких кодов являются код Шеннона – Фоно и код Хаффмана. Необходимо учесть, что средняя длина кодового слова

$$\overline{n} = \sum_{i=1}^{K} p_i n_i \geq \frac{H(A)}{\log m}$$

Приложение

Рекомендуемые задачи

Задачи к разделу 1

1.1Случайна величина X имеет плотность распределения $\begin{array}{l} f(x)=\alpha e^{-\alpha x}, \alpha>0, x \geq 0 \\ f(x)=0, x<0 \end{array}$. Определить относительные флуктуации данной случайной величины.

1.2На вход усилителя с коэффициент усиления $k=10$ поступает постоянное во времени напряжение, величина которого равномерно распределена на интервале $(0 \div 1)$В. Определить относительные флуктуации выходного сигнала.

1.3На вход логарифмического усилителя поступает сигнал S, уровень которого является случайной величиной равномерно распределенной на интервале $(0 \div 5)$В. Определить относительные флуктуации сигала на выходе логарифмического усилителя.

1.4Среднее число квантов оптического излучения некогерентного источника света равно 10^9 квантов. Определить среднее и дисперсию числа квантов данного источника за 8 с.

1.5Относительные флуктуации отклика лавинного фотодиода на отдельный квант света составляют 120%, зарегистрировано 10^8 квантов света. Определить относительные флуктуации суммарного отклика фотодиода.

1.6Среднее число квантов света, поступающих на вход фотоприемника, составляет 10^{10} квантов света за 5 с. Вероятность регистрации отдельного кванта составляет 0,97. Определить среднее, дисперсию и относительные флуктуации числа квантов зарегистрированных фотоприемником за 15 с.

1.7Коэффициент усиления усилителя является случайной величиной с относительными флуктуациями 12%. Определить относительные флуктуации выходного сигнала, если на вход усилителя поступает постоянное напряжение.

1.8Доказать, что дисперсия суммы двух и более независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

1.9Выходной сигнал

$$y = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

где x_i – независимые и одинаково распределенные случайные величины с относительными флуктуациями равными 0,1%. Определить относительные флуктуации величины y .

1.10Выходной сигнал

$$y = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

где x_i – независимые и одинаково распределенные случайные величины с относительными флуктуациями равными 0,1%. Определить относительные флуктуации величины y, если N принимает значение 10^2 с вероятностью 0,4 и 10^3 с вероятность 0,3.

1.11Доказать, что для пуассоновского распределения целочисленной случайной величины n с $p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, i = 0,1..,n$ среднее значение $\bar{n}$ равно дисперсии этого числа.

1.12Определить относительные флуктуации суммы случайного числа случайных слагаемых. Указанные слагаемые независимы и одинаково распределены.

1.13Имеются три независимых измерения неизвестного параметра S с относительными погрешностями 0,1%, 0,1% и 0,2%. определить параметры оптимальной по минимуму среднеквадратической погрешности линейной системы, формирующей итоговую оценку параметра S. Найти погрешность данной итоговой оценки.

1.14«Мертвое» время непродлевающегося типа детектора ионизирующего излучения составляет $10^{-8}c$, а среднее число частиц поступающих на вход детектора составляет 10^7 $\text{частиц}/c$. Определить относительные флуктуации числа частиц зарегистрированных за 5 с.

1.15Параметр λ пуассоновского распределения

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, i = 0,1..,n$$

является случайной величиной с плотностью распределения

$$f(\lambda) = e^{-\lambda}, \lambda \geq 0$$
$$f(\lambda) = 0, \lambda < 0$$

Определить распределение p_i в данном случае. (Искомое распределение носит наименование распределение Бозе-Эйнштейна).

1.16На вход усилителя с коэффициентом усиления k поступает сигнал s с известным средним S и дисперсией σ_s^2. При этом коэффициент усиления k – случайная величина с известными $\bar{k}$ и σ_k^2. Определить относительные флуктуации сигнала на выходе усилителя.

1.17Связь между током и напряжением в диоде

$$I = A(e^{BU} - 1)$$

где A и B – постоянные; U – случайная величина с известными средними и дисперсией. Оценить относительные флуктуации тока, протекающего через диод.

1.18Доказать, что относительные флуктуации среднего

$$y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

где x_i – независимо и одинаково распределенные случайные величины, пропорциональны величине $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

1.19Доказать, что характеристическая функция суммы фиксированного числа независимых случайных слагаемых равна произведению характеристических функций этих слагаемых.

1.20Доказать, что дисперсия целочисленной случайной величины

$$\sigma_n^2 = \frac{\partial^2 \nu(z)}{\partial z^2}\Big|_{z=1} + \frac{\partial \nu(z)}{\partial z}\Big|_{z=1} - \left(\frac{\partial \nu(z)}{\partial z}\Big|_{z=1}\right)^2$$

где $\nu(z)$ – производящая функция случайной величины.

Задачи к разделу 2.

2.1Корреляционная функция случайного процесса имеет вид.
Определить энергетический спектр $S(\omega)$ случайного процесса.

2.2Энергетический спектр $S(\omega)$ случайного процесса $X(t)$ имеет вид:
Определить дисперсию и корреляционную функцию данного процесса.

2.3Корреляционная функция случайного процесса

$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$,

где ω_0 и α - параметры

Определить интервал корреляционного процесса и его энергетический спектр.

2.4Доказать, что корреляционная функция суммы двух и более независимых случайных процессов равна сумме корреляционных функций каждого из них.

2.5Определить дисперсию наблюдаемого сигнала

$$y(T) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

где $x(t)$ – случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией

$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$

2.6Определить дисперсию наблюдаемого процесса

$$y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

где $X(t)$ – случайный процесс с корреляционной функцией

$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{\tau^2}{2\alpha^2}}$.

2.7На вход интегрирующей RC – цепочки действует «белый шум» со спектральной плотностью N_0. Определить дисперсию выходного сигнала в установившемся режиме.

2.8На вход колебательного контура с добротностью Q и резонансной частотой ω_0 действует «белый шум» со спектральной плотностью N_0. Определить энергетический спектр выходного сигнала.

2.9На вход интегрирующей RC – цепочки действует пуассоновская δ – импульсная последовательности с интенсивностью λ. Определить относительные флуктуации выходного сигнала в установившемся режиме.

2.10На вход усилителя с АРУ поступает детерминированный сигнал $x(t) = kt$. Определить установившееся значение выходного сигнала.

2.11 Определить условие устойчивости по среднему значению с АРУ при поступлении на его вход пуассоновской последовательности, причем амплитуда импульсов – независимые случайные величины с плотностью распределения

$$f(A) = p_0\delta(A + A_0) + (1 - p_0)\delta(A - A_0)$$

2.12Определить среднеквадратическую погрешность восстановления случайного процесса с корреляционной функцией $B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ по пуассоновской последовательности отсчетов с интенсивностью λ.

2.13Определить корреляционную функцию и энергетический спектр случайного процесса на выходе интегрирующей RC – цепи при поступлении на ее входе случайного процесса с корреляционной функцией $B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

2.14Определить дисперсию случайного процесса на выходе линейного фильтра при поступлении на его вход пуассоновской δ – импульсной последовательности с интенсивностью λ.

2.15 Случайный процесс наблюдается в два момента времени: t и $t-T$. Построить линейную оценку значения случайного процесса в момент времени $t-\frac{T}{2}$ по минимуму среднеквадратической погрешности. Определить данную погрешность (задача интерполяции).

2.16 Построить линейную оценку по минимуму среднеквадратической погрешности производной $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$ случайного процесса $x(t)$ по двум значениям: $x(t)$ и $x(t-T)$. Определить погрешность данной оценки.

2.17 Наблюдаются два значения $x(t)$ и $x(t-T)$ аддитивной смеси ($x(t)=s(t)+n(t)$) полезного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ с нулевыми средними и корреляционными функциями $B_s(\tau)$ и $B_n(\tau)$ соответственно. Построить линейную оценку полезного сигнала. Определить погрешность оценивания (задача фильтрации).

2.18 Какой фильтр называют физически нереализуемым? Как можно практически использовать такие фильтры?

2.19 Из определения среднеквадратической погрешности оценивания получить интегральное уравнение Винера-Хопфа.

Задачи к разделу 3

3.1Задан алфавит:

a_1 – $p_1 = 0.1;$
a_2 – $p_2 = 0.1;$
a_3 – $p_3 = 0.2;$
a_4 – $p_4 = 0.03;$
a_5 – $p_5 = 0.07;$
a_6 – $p_6 = 0.15;$
a_7 – $p_7 = 0.05;$
a_8 – $p_8 = 0.12;$
a_9 – $p_9 = 0.08;$
a_{10} – $p_{10} = 0.1.$

Определить собственную информацию каждой буквы данного алфавита.

3.2Для алфавита, заданного в задачи 3.1 определить энтропию источника сообщений и вычислить его избыточность.

3.3 Доказать, что максимум энтропии дискретного источника сообщений достигается при равных вероятностях появления отдельных сообщений.

3.4 Доказать, что условная энтропия не превосходит безусловную.

3.5 Вычислить дифференциальную энтропию гауссова непрерывного источника сообщений.

3.6 Вычислить дифференциальную энтропию непрерывного источника сообщений при равномерном распределении значений на интервале ($\mathbf{O},\mathbf{1}$).

3.7 Вычислить дифференциальную энтропию непрерывного источника сообщений при плотности сообщений при плотности распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{C}{x^2 + 1}$$

где C – постоянная, определяемая из условия нормировки функции $f(x)$.

Данное распределение в теории вероятностей называют распределение Коши, а в физике – распределение Лоренца.

3.8Показать, что максимально возможное значение дифференциальной энтропии при заданной средней мощности сигнала $P_{C'}$

$$H_{\partial}(A)_{\max} = \frac{1}{2}\log\frac{P_{C'}}{P_{ш}}$$

где $P_{ш}$ – средняя мощность шума распределения.

3.9Показать, что при заданной мощности шума информационный объем сигнала не может превысит величину

$$V_C = \Delta f T_C \log\frac{P_{C'}}{P_{ш}}$$

где Δf – полоса частот сигнала; T_C – длительность сигнала. Обозначения $P_{C'}$ и $P_{ш}$ раскрыты в предыдущей задаче.

3.10Показать, что пропускная способность гауссовского канала непрерывного времени не может превышать величину

$$C = \Delta f \log(1 + \frac{P_{C'}}{P_{ш}})$$

Обозначения те же, что и в предыдущей задаче.

3.11Определить максимально возможную пропускную способность гауссовского канала при неограниченной полосе частот.

3.12 Показать, что для передачи одной единицы информации по каналу с шумами сигнала должен иметь энергию $E \geq 0{,}69 N_{ш}$, где $N_{ш}$ – энергия шума в единичной полосе частот.

3.13 Для алфавита, заданного в задаче 3.1 построить методом Шеннона-

Фано двоичный код. Найти среднюю длину кодового слова и сравнить ее энтропией источника сообщений.

3.14 Для алфавита, заданного в задаче 3.1 построить методом Хаффмана двоичный код. Найти среднюю длину кодового слова и сравнить ее энтропией источника сообщений.

3.15 Источник сообщений выдает символ из ансамбля (алфавита) имеющего объем $k = 8$. Записать кодовые комбинации примитивного равномерного кода, соответствующие буквам данного алфавита. Построить граф кода (кодовое дерево).

3.16 Показать, что кодировании равномерным кодом с основание m букв источника сообщений, имеющего производительность $H'(A)$ число разрядов в кодовой комбинации не может быть меньше, чем

$$\overline{n_{\min}} = \frac{\log K}{\log m}$$

K – объем алфавита; m – основание кода.

3.17Показать, что при использовании n – разрядного примитивного кода вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации не может быть сколь угодно малой при фиксированной вероятности ошибочного приема элементарного символа.

3.18 Сравнить дифференциальные энтропии нормального процесса и процесса равномерно распределенного на интервале ($-a, a$), если их дисперсии одинаковы.

3.19 Показать, что вероятность ошибки в канале с шумами не может быть сколь угодно малой, если пропускная способность канала C меньше производительности источника $H'(A)$.

3.20 Найти энтропию шума в двоичном симметричном канале без памяти, если энтропия на входе источника на входе канала $H(A) = 1000 \frac{бит}{символ}$, энтропия источника, образованного выходом канала $H(B) = 2000 \frac{бит}{символ}$; ненадежность канала $H(\frac{A}{B}) = 200 \frac{бит}{символ}$.

Рекомендуемая литература

1. Котоусов А.С. Теория информации. Учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2003 – 770с.
2. Кловский Д.Д., Шилкин В.А. Теория передачи сигналов в задачах. – М.; Связь, 1978.-352с.
3. Кловский Д.Д., Шилкин В.А. Теория электрической связи. – М.; Радио и связь, 1990.-280с.
4. Котоусов А.С. Теоретические основы радиосистем: Учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2002.-224с.
5. Акулиничев Ю.П., Дроздова В.И. Теория информации. Учебное пособие для вузов.- Томск, ТМЦДО, 2005 – 108с.